Közgazdasági Szemle, LV. évf., 2008. április (372–374. o.)

Medvegyev Péter: Stochastic Integration Theory

Oxford University Press, Oxford–New York, 2007, 628 oldal; ISBN 978-0-19-921525-6

Medvegyev Péter Stochastic Integration Theory című könyve 2007-ben jelent meg az Oxford University Press kiadásában, az Oxford Graduate Texts in Mathematics sorozat 14. köteteként. A címet fordíthatjuk Sztochasztikus integrálelméletként, de érdemes megjegyezni, hogy a könyv nemcsak integrálelmélettel foglalkozik, hanem általában azzal a matematikai területtel, amit sztochasztikus analízisnek (is) szokás nevezni. A témakör elsődleges célközönségét olyan olvasók alkotják, akik matematikai vagy egyéb kvantitatív területeken tanulnak, oktatnak, illetve kutatnak. A könyv olyan közgazdászok, elsősorban a pénzügyesek (befektetéselemzők, kockázatkezelők) körében is érdeklődésre tarthat számot, akik szeretnének elmélyülni a kérdéskör megértésében.

A sztochasztikus analízis az elmúlt évtizedekben került a matematikusok és a kvantitatív pénzügyekkel foglalkozó közgazdászok figyelmének középpontjába. Ez elsősorban annak köszönhető, hogy a matematikai pénzügyek talán legnépszerűbb kérdésköre, a származtatott termékek árazásának elmélete a sztochasztikus analízis eszközeit és eredményeit használja fel. Ennek a közgazdasági elméletnek az alapköveit Fischer Black, Robert Merton és Myron Scholes tették le 1973 körül. A kérdéskör 1997-ben szimbolikusan is bevonult a közgazdaságtan ismert és elismert témái közé, ebben az évben vehette át ugyanis Merton és Scholes a közgazdaságtani Nobel-díjat (Fisher Black akkor már nem élt). A pénzügyi piacok fejlődése, az újabb és összetettebb származtatott termékek megjelenése, a kifinomult kockázatkezelés fontosságát jelző pénzügyi csődök és botrányok egyre érdekesebb és egyre több gyakorlati jelentőségű kérdést szolgáltattak a téma iránt érdeklődő kutatók számára. Mindezek hatására matematikusok és fizikusok kezdtek pénzügyi kérdésekkel foglalkozni, a pénzügyesek pedig sztochasztikus analízist tanulni, vagy legalábbis ismerkedni a területtel. Medvegyev Péter most megjelent munkája segítségükre, segítségünkre lehet ebben a törekvésben.

A könyv nagyban támaszkodik a szerző magyar nyelven már megjelent, Sztochasztikus analízis című könyvének anyagára. Tartalmilag az Ito-formulával és a független növekményű sztochasztikus folyamatokkal foglalkozó fejezetekben találkozunk a legtöbb új mondanivalóval, szerkezetileg azonban a többi rész is megújult. A legfontosabb különbség, hogy az integrálelméletet más úton, más megközelítésben építi fel a szerző. Ez nemcsak a saját korábbi könyvéhez képest tekinthető újításnak, hanem a nemzetközi szakirodalomban bevett tárgyalási módoktól is eltér. Az újítás célja természetesen az volt, hogy a bemutatott matematikai konstrukció egyszerűbb és könnyebben megérthető legyen.

A könyv első fejezete a sztochasztikus analízis elméleti alapjait tárgyalja. A sztochasztikus folyamatok leglényegesebb fogalmainak bemutatása után a megállási idők, a martingálok és a lokális martingálok elméletéről esik szó. Az egész könyvet áttekintve ebben a részben találkozhatunk a levezetések mellett a legtöbb szöveges kitérővel és illusztratív magyarázattal. Erre szükség is van, hiszen az alapvető definíciók, például a mérhetőségi és folytonossági megkötések pontos elsajátítása elengedhetetlen a későbbi fejezetek megértéséhez. Szintén ebben a fejezetben esik szó az integrálelmélet felépítése során alapvetőnek számító Doob-egyenlőtlenségekről, valamint a különböző függvényterek és konvergenciafogalmak kapcsolatáról.

A következő három fejezet lépésről lépésre építi fel, illetve terjeszti ki egyre szélesebb folyamatosztályokra a Riemann- és Stieltjes-integrálok általánosításának tekinthető Ito-integrál fogalmát. Ezeket a részeket tekinthetjük talán a szűkebb értelemben vett sztochasztikus integrálelmélet kidolgozásának. Néhány mondat erejéig érdemes itt kitérni arra, hogy miért van szükség a kvantitatív pénzügyekben integrálfogalmakra. Az integrálokat legegyszerűbben súlyozott összegek határértékeként lehet elképzelni, az integrálelmélet felépítése során pedig elsősorban arra a kérdésre keressük a választ, hogy mit és mivel súlyozhatunk össze ahhoz, hogy az integrál – valamilyen értelemben – létezzen. A súlyokat adó folyamatot integrátornak, a súlyozandó értékeket integrandusnak nevezzük. A tipikus közgazdasági alkalmazások során az integrátor szerepét pénzügyi eszközök árfolyamai töltik be, míg az integrandus azt mutatja meg, hogy mekkora az aránya ezeknek az eszközöknek a portfóliónkban. Az integrál értéke így a befektetésünkön elért kumulált nyereség, illetve veszteség lesz. A probléma matematikai nehézségét az adja, hogy azokkal a folyamatokkal, amelyeket a pénzügyi modellezésben használunk, a hagyományos, elemi analízisből ismert integrálelmélet nem működik. Így válik szükségessé ennek az elméletnek a módosítása és általánosítása. Ez az általánosítás elsősorban azt jelenti, hogy olyan konstrukciót alkotunk, amelyben az integrátor szerepét bizonyos szempontból kellemetlenül viselkedő folyamatok, nevezetesen négyzetesen integrálható lokális martingálok és szemimartingálok is betölthetik. Az integrálelmélet felépítése kapcsán ezekben a fejezetekben sor kerül a lokális martingálok struktúrájának jellemzésére, illetve a kiterjesztett integrálfogalom tulajdonságainak levezetésére is. Szintén itt találkozhatunk a sztochasztikus analízisben jelentős szerepet betöltő kvadratikus variáció és előre jelezhető kompenzátor fogalmakkal.

Az ötödik fejezet érdekessége, hogy a Doob–Meyer-felbontást csak itt, az egyéb tételek között tárgyalja a szerző. Az integrálelmélet hagyományosnak nevezhető felépítése ugyanis ebből a tételből indul ki, a nevezetes összefüggés a szerző magyar nyelvű könyvében is az első fejezetben szerepel. A Doob–Meyer-felbontás azonban, sajnos, meglehetősen nehezen feldolgozható tétel, így kiiktatása a konstrukcióból igencsak megkönnyíti az olvasó dolgát.

A hatodik fejezetben kerül sor az Ito-formula, valamint Girszanov-tétel ismertetésére. A tételek bizonyítása után példák és alkalmazások segítik az olvasót az eredmények megértésében és használatuk elsajátításában. Ez a két tétel tekinthető a kvantitatív pénzügyek és különösen az eszközárazási elmélet alapjainak, így közgazdasági szempontból a hatodik bizonyul a könyv legfontosabb fejezetének. Ezeket az oldalakat minden matematikai pénzügyekkel foglalkozó olvasó haszonnal lapozgathatja – tananyag helyett inkább kézikönyvként.

A hetedik és egyben utolsó fejezet a szemimartingálok osztálya után a sztochasztikus folyamatok másik nagy jelentőségű csoportjával, a független növekményű folyamatokkal foglalkozik. Itt kerül tárgyalásra például az operációkutatási, kockázatkezelési és aktuáriusi modellezés során gyakran használt Poisson-folyamatokkal kapcsolatos több kérdés, illetve a nevezetes Lévy-Hincsin formula is.

A függelék elsősorban a könyv gondolatmenetébe szervesen nem illeszkedő vagy részletesen tárgyalni nem kívánt témaköröket tartalmaz. Itt található a mértékelmélet néhány alapvető tétele, valamint a Wiener- és Poisson-folyamatok több alapvető tulajdonságát bemutató állítás és példa. Ezek közül külön felhívjuk a figyelmet a Wiener-folyamattal foglalkozó részre, mivel ennek a folyamattípusnak meghatározó jelentősége van a pénzügyi modellezésben.

A könyv anyagának teljes körű feldolgozásához és megértéséhez természetesen szükséges, hogy az olvasó rendelkezzék bizonyos matematikai előismeretekkel. A sztochasztikus analízis leginkább a valószínűségszámítás, a mértékelmélet és a funkcionálanalízis fogalmaira, tételeire és eredményeire épít. Ezeknek a tudományterületeknek a legfontosabb összefüggései elengedhetetlenül szükségesek a könyvben szereplő állítások bizonyításához. Ilyen alapvető összefüggéseknek számítanak például a majorált és a monoton konvergencia tételei, a Fatou-lemma, a Riesz-tétel vagy a Fubini-tétel. Mivel ezek a tételek nem tartoznak szorosan a sztochasztikus analízis témaköréhez, a szerző ismertetésükre külön nem tér ki, feltételezi, hogy az olvasó tisztában van velük. Ez azonban semmiképpen nem jelenti azt, hogy a fent említett területeken kevésbé jártas érdeklődők nem forgathatják haszonnal a könyvet, hiszen a sztochasztikus integrálás elméletének felépítését, a konstrukció ívét és lényegét a bizonyítások teljes körű elsajátítása nélkül is meg lehet érteni.

A matematikai előismeretek közül a könyv megértése szempontjából az a legfontosabb, hogy az olvasónak kellő rutinja legyen az erre a területre jellemző absztrakt nyelvezet megértésében. A könyvet ugyanis – a téma miatt nem meglepő módon – erős formalizmus jellemzi, részletes kísérőszövegekre ritkábban számíthatunk. A hosszabb magyarázatokat inkább a könyv elején, a bevezető jellegű részekben találjuk, a szerző ugyanis nagy hangsúlyt helyez arra, hogy az alapokat kellő biztonsággal elsajátítsa az olvasó. Lényeges megjegyzéseket találhatunk továbbá az elmélet közgazdaságtani, elsősorban pénzügyi szempontból fontos pontjainál. Megismerhetjük például a pénzügyi interpretációját annak, hogy miért kell az Ito-féle integrál közelítő összegeiben – szemben a hagyományos Riemann-integrállal – a tesztpontot az intervallum elején választani; illetve megtudhatjuk, hogy mit jelent a nullmértékű halmazok bosszúja. A lehetséges olvasók között mindezek ellenére akadnak majd olyanok, akik több szöveges segítséget igényelnének a levezetések közben, ezek a kiegészítések és megjegyzések azonban valószínűleg kezelhetetlen méretűvé növelték volna a könyvet.

A tételek és fogalmak közötti kapcsolatok tisztább átlátását, az olvasó eligazodását a szövegben jól követhető, részletes lábjegyzetek segítik. A tárgymutató szintén kellően részletes, sokkal jobban használható, mint a magyar nyelvű könyvben. Hiányzik ugyanakkor egy, a fontosabb jelöléseket tartalmazó összefoglaló jegyzék, amely különösen azokat az olvasókat segítené, akik nem lineárisan olvassák az anyagot, annak csupán egyes pontjait szeretnék megismerni vagy feleleveníteni.

A könyv irodalomjegyzéke felöleli a sztochasztikus integrálás és az ehhez kapcsolódó matematikai területek legfontosabb problémaköreit, témáit. Mindenképpen hasznosnak tartjuk, hogy a szerző elsődleges forrásokra, a sztochasztikus analízis nagyjainak (a teljesség igénye nélkül Doob, Doléans, Ito, Meyer) munkáira hivatkozik, így az irodalomjegyzék alapos tanulmányozásával egyfajta történelmi áttekintést is kaphatunk a terület fejlődéséről. A témában még jobban elmélyülni vágyó olvasónak hasznos tanácsokkal szolgál a szerző a Jegyzetek és megjegyzések című részben, ahol több, hasonló témában megjelent könyvre is felhívja a figyelmet, és rövid útmutatást is ad arra vonatkozóan, hogy milyen tárgyalási módokra lehet számítani ezekben a művekben.

Medvegyev Péter az előszóban tett vallomása szerint főleg azért kezdte el írni ezt a könyvet, mert meg akarta érteni a sztochasztikus analízis kérdéseit és összefüggéseit. Igazán örömteli, hogy a megértésig vezető út tapasztalatait és a benne már letisztult elméletet olyan formába öntötte, amely nekünk olvasóknak is segíthet hasonló célok elérésében.

Bátyi Tamás László–Vidovics-Dancs Ágnes

Bátyi Tamás László a Budapesti Corvinus Egyetem hallgatója.
Vidovics-Dancs Ágnes a Budapesti Corvinus Egyetem doktoranduszhallgatója.