Közgazdasági Szemle, LIV. évf., 2007. július–augusztus (628–643. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS–TÓTH JÁNOS

Új eredmények az optimális járadékfüggvény tervezéséről

A korábbi írásainkat folytatva, ez a dolgozat is a mechanizmustervezést alkalmazza a rugalmas nyugdíjrendszer (nemlineáris) optimális járadékfüggvényének kiszámítására. Feltesszük, hogy az egyéneknek magáninformációjuk van saját várható élettartamukról. A kormányzat célja egyfajta újraelosztás: olyan nyugdíjmechanizmus (járulékkulcs és a szolgálati időtől függő járadékfüggvény) tervezése, amely maximalizálja a társadalmi jóléti függvényt, és kielégíti a társadalmi költségvetési korlátot (de nem veszi figyelembe az egyéni költségvetési korlátokat). Mivel a különböző várható élettartamú egyének optimális megoldása függ a járadékfüggvénytől, a kormányzatnak figyelembe kell vennie az érdekeltségi feltételeket. A korábbi cikkekben a megoldás rugalmatlanságát és az újraelosztás túlterjeszkedését a társadalmi jóléti függvény konkavizálásával mérsékeltük. Mostani cikkünk új eredményei a következők: *1.* levezetjük az újraelosztás elkerülhetetlenségét az ésszerű nyugdíjrendszerekben; *2.* megmutatjuk a második legjobb megoldások lehetséges lokális meghatározatlanságát, *3.* visszatérve az utilitarizmushoz, explicit módon mérlegeljük az újraelosztás minimalizálását.*

Journal of Economics Literature (JEL) kód: D82, D91 és H55.

Ebben a dolgozatban visszatérünk korábbi írásaink (*Ező–Simonovits* [2003], *Simonovits* [2004*a*], [2004*b*]) témaköréhez. Az optimális rugalmas nyugdíjjáradék tervezését a korábbiakhoz hasonlóan most is azon feltétel mellett mérlegeljük, hogy az egyéneknek magáninformációjuk van saját várható élettartamukról. A kormányzat célja: olyan nyugdíjszabályok (járulékkulcs és járadékfüggvény) tervezése, amelyek maximalizálnak egy alkalmas társadalmi jóléti függvényt, és kielégítik a társadalmi költségvetési korlátot. Aláhúzzuk, nem hiszünk abban, hogy bármely valóságos kormányzat akármilyen társadalmi jóléti függvényt maximalizál, de a mai mechanizmustervezés nélkülözhetetlen elemzési eszközeként elfogadjuk e feltevést. Kiemeljük, hogy általában nem követeljük meg, mert nem célszerű megkövetelni, hogy az egyes típusokra is teljesüljön a költségvetési korlát, tehát *újraelosztó* rendszereket vizsgálunk. (Vigyázat: itt az újraelosztáson nem a szokásos, gazdagtól a szegényhez irányuló jövedelemátcsoportosítást értjük. Egyszerűen

* Külön köszönet illeti meg *Eső Pétert* mint a cikksorozat első tagjának társszerzőjét. A korábbi cikkek köszönetnyilvánításán túl újból hálánkat fejezzük ki *Peter Diamondnak* és *Vincze Jánosnak* élénk ellenvéleményükért. Külön köszönetet mondunk *Kornai Jánosnak,* aki egy előadáson hiányolta az újraelosztás büntetését; és egy névtelen lektornak a cikk korábbi változatához fűzött értékes megjegyzéseiért. Szokás szerint a cikkben foglaltakért minden felelősség a jelen szerzőket illeti. Simonovits András kutatását az OTKA K 67853 pályázata támogatta. Tóth János kutatását az OTKA T 047132 pályázata támogatta.

Simonovits András, MTA Közgazdaságtudományi Intézet, CEU és BME (e-mail: simonov@econ.core.hu).
Tóth János, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (e-mail: jtoth@math.bme.hu).

az azonos keresetű, de különböző várható élettartamú típusok közti újraelosztásra gondolunk, főleg a rövidebb várható élettartamúaktól a hosszabbak felé.) Bár az újraelosztás az ésszerű nyugdíjrendszerek széles körében elkerülhetetlen, nem lehet teljesen szemet hunyni felette, mert sokan ezen az alapon támadják az életjáradékos és befizetésarányos nyugdíjrendszereket. Mivel a különböző várható élettartamú egyének optimális döntése függ a szabályoktól, a szabályok meghatározásakor a kormányzatnak figyelembe kell vennie az érdekeltségi feltételeket.

A korábbi eredmények közül azt tartjuk legfontosabbnak, hogy *Eső–Simonovits* [2003] meghatározott *egy* második legjobb újraelosztó megoldást kettőnél több típus esetén is. Itt is érvényes a mechanizmustervezésből jól ismert elv: a társadalmilag optimális megoldás tompítja, de nem szünteti meg az úgynevezett biztosításmatematikai méltányosság által adott ösztönzést. Köznapi példával élve, és némileg stilizálva, visszaállítja a nyugdíjkorhatár feletti szolgálati időért járó, 2004 előtt Magyarországon érvényes évi 1,5 + + 3,6 = 5,1 százalékos bónuszt a jelenlegi 2 + 6 = 8 százalékos helyett.

Ennek a cikknek a megírására az késztetett bennünket, hogy kiderült: általában nemcsak egy, hanem számtalan második legjobb újraelosztó megoldás létezik. Cikkünk 5. tételéből következik, hogy $n > 2$ típus esetén a második legjobb megoldás szabad változóinak száma általában $n - 2$. Ebben az esetben viszont helytelen egyetlen megoldást kiemelni, és annak változását vizsgálni a rendszer alapparamétereinek függvényében. Inkább meg kell határozni – legalábbis közelítően – az összes második legjobb újraelosztó megoldást, amelyek közül azokat a lehető legkisebb újraelosztást megvalósító megoldásokat érdemes választani, amelyekre a társadalmi jólét csökkenése még elfogadható. A többes szám használata rávilágít arra, hogy a háromnál több típusú modellben a második legjobb megoldások lokális meghatározatlansága nem szűnik meg, csupán a szabadságfok eggyel csökken.

Korábban elvetettük a merev optimumú és túlzottan újraelosztó utilitarista társadalmi jóléti függvényt, s helyette az *általánosított utilitarista* társadalmi jóléti függvényt tekintjük, amelyben alkalmas konkáv függvénnyel transzformáljuk az egyéni életpálya-hasznosságokat. *Mas-Colell és szerzőtársai* [1995] több fejezete foglalkozik a kérdéskörrel. Figyelmeztetjük az Olvasót a *Mas-Colell és szerzőtársai* [1995] szóhasználatának veszélyére: külön ki kell kötni, hogy az általánosított utilitarizmus nem (tiszta) utilitarizmus. Ettől a pontosítástól a továbbiakban eltekintünk.

A határozatlanságot kiaknázó és az újraelosztást explicit módon kezelő új megközelítésünkben viszont nincs szükség erre a fogásra, visszatérhetünk az egyszer már elvetett utilitarista függvényhez. Igaz, ekkor vagy explicit módon korlátozni kell az újraelosztás mértékét, például az életpálya-egyenlegek szórásnégyzetét, vagy módosítani kell az utilitarista társadalmi jóléti függvényt, például levonva belőle az életpálya-egyenlegek szórásnégyzetének alkalmas skalárszorosát. A két ekvivalens megközelítésből mi az utóbbit választjuk, bár ezzel kilépünk a Bergson–Sameulson-féle társadalmi jóléti függvények köréből, tudniillik az új célfüggvény már nem csupán az egyéni jólétek függvénye.

Az új célt azonban a korábbi sok típus helyett csak három (vagy öt) típus esetére tudtuk teljesíteni, mert az utilitarista társadalmi jóléti függvény esetén a numerikus megoldásban élesebbé válik a típusfelbontás finomsági korlátja: minél több különböző típusba képesek besorolni magukat az egyének, annál meghatározatlanabb a jóléti optimum. A kisszámú típus feltevése egyébként is reális.

Minden változás ellenére, újabb eredményeink összecsengnek a korábbiakkal: *jelentősen tompítani kell a hagyományos „méltányos" ösztönzést*. Számpéldával élve: ha a legrövidebb várható felnőtt élettartam (50 év) a leghosszabbnak (60 év) a 83 százaléka, akkor a második legjobb megoldásban a rövid életű nyugdíja a hosszú életű nyugdíjának (a teljes nettó keresetnek) 85 százaléka, a szolgálati idő viszont 95 százaléka (42,5 év szemben a 44,6 évvel) (vö. *2. táblázat*). Ezzel szemben a hagyományos biztosításmatematika és a ráépülő eszmei számlarendszer egyaránt eltekint a várható élettartamokra vonatkozó aszimmetrikus információtól, s ezért sokkal vadabb ösztönzést javasol: a nyugdíj feleződik (a nettó kereset 150 százalékáról 75 százalékára), míg a szolgálati idő a megnövelt maximumnak a 88 százaléka (47,9 év helyett 42,3 év). Tényleg elég vad ötlet, és több ország már be is vezette.

Szándékunk szerint a cikk önmagában is megérthető, de a részletekhez hasznos lehet a korábbiak, különösen *Ső–Simonovits* [2003] ismerete. A korábbi hivatkozásokat nagyrészt mellőztük. Az új források közül megemlítjük *Bommier és szerzőtársai* [2006]-t a megközelítés hasonlósága miatt, illetve *Pál–Csendes* [2007]-t az eredeti Eső–Simonovits-feladat globális maximumának pontos meghatározásáért.

A cikk szerkezete a következő. Először röviden felidézzük az alapmodellt, majd összefoglaljuk a korábbi eredményeket. Ezt követően bemutatjuk az új eredményeket, amit numerikusan is szemléltetünk. A tanulmányt következtetéseinkkel zárjuk.

A modell

A modellben olyan (stacionárius) népességet tekintünk, amelynek tagjai egyoldalúan ismerik saját várható élettartamukat. Minden egyén 0 évesen lép be a munkapiacra, és egységnyi terméket termel évente, amelyből τ járulékot fizet, $0 < \tau < 1$. Amint az megszokott az időskori nyugdíjmodellekben, feltesszük, hogy a dolgozók nem takaríthatnak meg, és mindegyikük megéri a nyugdíjkort, amely után már nem termelnek. Mivel az időskorban fogyasztott áruk és szolgáltatások jelentős része nem tárolható, korábbról nem tehető félre, ezért az időskori megélhetéshez jól tervezett nyugdíjrendszerre van szükség, indexált életjáradékra.

A népességet alkotó egyének várható élettartamuk alapján $n > 1$ típusba sorolják magukat: $t = S, \ldots, T$ természetes számok, és a t a típus várható (felnőtt) élettartama, azaz $n = T - S + 1$. A t-típus nyugdíja b_t, nettó keresethez viszonyított értéke $b_t/(1 - \tau)$ és szolgálati ideje $R_t < S$. (Szavakkal: a leghosszabb élettartamú dolgozó szolgálati ideje rövidebb, mint a legrövidebb várható élettartam. Ez ésszerű feltevés az öregségi nyugdíjrendszerben, és kizár bizonyos kellemetlenségeket.)

Feltesszük, hogy a t-típus gyakorisága f_t, ahol $f_t > 0$, és $\sum_{t=S}^{T} f_t = 1$, és legyen $m = \sum_{t=S}^{T} tf_t$ a népesség átlagos várható élettartama. Elvben az idő mértékegysége (hónap, év, évtized) közömbös. Gyakorlatban azonban az időegység mutatja, hogy a szereplők milyen pontossággal képesek besorolni magukat az egyes típusokba. Célszerűtlen tehát túlzottan finom beosztású modellel dolgozni.

A továbbiak szempontjából fontos szerepet játszik az egyes típusok életpálya-egyenlege:

$$z_t = \tau R_t - b_t(t - R_t).$$

A pozitív egyenleg azt jelenti, hogy a típus tagjai halálukig többet fizettek be, mint amennyit kapnak. Megköveteljük, hogy a népesség átlagos várható egyenlege nulla legyen:

$$Z = \sum_{t=S}^{T} z_t f_t = 0.$$

Ha $z_t = 0$ minden $t = S, \ldots, T$ esetén, akkor a rendszert *semlegesnek* nevezzük, egyébként *újraelosztónak.*

Az egyén csak a megélhetéséért dolgozik, egységnyi munka- és nyugdíjasidő alatt az x fogyasztás az $u(x)$ és a $w(x)$ hasznosságot nyújtja, ahol $u(x) < w(x)$. Feltesszük,hogy mindkét függvény növekvő, szigorúan konkáv és sima. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $u(x) = w(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ahol ε a munka határáldozata állandó.

A kormányzat mindvégig adottnak és állandónak veszi a τ járulékkulcsot, ezért az $\bar{u} = u(1-\tau)$ jelöléssel élünk. Egyetlenegy megszorítást teszünk $\bar{u}$-ra és w-re:

$$w(0) - w'(0)\tau < \bar{u} < w(1) - w'(1)(\tau - 1), \tag{1}$$

ahol $w(0) = -\infty$ és $w'(0) = \infty$ is megengedett.

A t várható élettartamú egyén v_t életpálya-hasznosságfüggvénye a dolgozói és nyugdíjas szakasz hasznosságfüggvényének az összege. Ha a t-típusú egyén R_t időt dolgozik, akkor $\bar{u}$ hasznossághoz jut R_t időn keresztül és a b_t életjáradék folytán $w(b_t)$ hasznossághoz $t - R_t$ időn keresztül, tehát az életpálya-hasznosságfüggvény

$$v_t = R_t\bar{u} + (t - R_t)w(b_t). \tag{2}$$

A kormányzat olyan optimális $b(R)$ nyugdíjjáradék–szolgálati idő sémát vagy $(b_t, R_t)_t$ sorozatot tervez, amely maximalizálja az egyéni hasznosságok növekvő és konkáv ψ függvényének súlyozott összegét, a

$$V = \sum_t \psi(v_t) f_t$$

társadalmi jóléti függvényt a $Z = 0$ társadalmi költségvetési feltétel mellett. (Vegyük észre, hogy különböző élettartamú egyének életpálya-hasznossága összeadásával vagy egy korosztály életpályajólétét, vagy a stacionárius népesség egy időszakos jólétét mérjük!)

A korábbi eredmények összefoglalása

A következőkben összefoglaljuk a korábbi eredményeket, főleg az újraelosztásról, de érintjük a semleges optimumot is.

Az első legjobb újraelosztó optimum

Először felfüggesztjük alapfeltevésünket: az egyéneknek *nincs* magáninformációjuk saját élettartamukról. Csak azt tesszük föl, hogy minden dolgozó (típus) várható élettartama mindenki által megfigyelhető. Ez a megoldás mérceként szolgál a következő alpontban aszimmetrikus információjú legjobb megoldás esetén.

A teljes informáltság miatt a társadalmi tervező (a mechanizmusszerkesztő) képes első legjobb nyugdíjtervet készíteni, a t-típusú dolgozóknak R_t szolgálati időt és b_t időszaki nyugdíjat írva elő, amelyet azok elfogadnak. Feltehetjük, hogy $0 < R_t < S$.

Ekkor a kormányzat a társadalmi jóléti függvényt maximalizálja, azaz

$$\max_{(b_t, R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t,$$

feltéve, hogy teljesül

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t, \qquad z_t = (\tau + b_t)R_t - tb_t, \qquad t = S, \ldots, T,$$

$$Z = \sum_{i=S}^{T} z_t f_t = 0.$$

Ezt a feladatot hívjuk az *első legjobb optimum feladatá*nak.

0. tétel. *Legyen valamely első legjobb újraelosztó megoldás* $(b_t^*, R_t^*)_{t=S}^T$. *Ekkor a nyugdíj független a várható élettartamtól:* $b_t^* = b^*$, *és kielégíti az*

$$\bar{u} - w(b^*) + w'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \tag{3}$$

egyenletet.

a) Ha ψ *lineáris (utilitarizmus), akkor végtelen sok* $(R_t^*)_t$ *első legjobb megoldás létezik, amelyekből kiemeljük azt, amikor a szolgálati idők egyformák:*

$$R_t^* = R^* = \frac{b^*}{\tau + b^*} m, \qquad t = S, \ldots, T,$$

b) Ha ψ *szigorúan konkáv, akkor az első legjobb szolgálati idők egyértelműek, és értékük független* ψ*-től*:

$$R_t^* = R^* + \frac{w(b^*)}{w(b^*) - \bar{u}}(t - m), \qquad t = S, \ldots, T,$$

feltéve, hogy $R_S^* > 0$ *és* $R_T^* < T$.

Megjegyzések. 1. Az (1) feltevés miatt a (3) egyenletnek van megoldása. Vegyük észre, hogy $\bar{u} < w(b^*)$, s a megoldás egyértelmű, hiszen a bal oldali kifejezés deriváltja negatív.

2. A későbbiek miatt külön megemlítjük az *a)* pont egy különleges első legjobb megoldását, a *semlegest* (korábban autarknak neveztük), amelyben a költségvetési feltétel minden típusra egyenként teljesül, azaz

$$R_t^N = \frac{b^*}{\tau + b^*} t, \qquad t = S, \ldots, T. \tag{4}$$

Aszimmetrikus információ esetén azonban általában nem valósíthatók meg az első legjobb megoldások, mert sértik a hamarosan bevezetendő úgynevezett érdekeltségi feltételeket. Milyen megszorításokkal járnak általában az érdekeltségi feltételek a megvalósítható mechanizmusokra? A következőkben a második legjobb (optimális *és* ösztönzéssel kompatíbilis) újraelosztó nyugdíjmechanizmusokkal foglalkozunk.

A második legjobb újraelosztó megoldás

Most elejtjük azt az ideiglenesen bevezetett feltevést, hogy a kormányzat ismeri a várható egyéni élettartamokat. Ekkor a második legjobb újraelosztó megoldást keresve, bevezetjük az érdekeltségi feltételeket, és levezetjük a társadalmilag optimális, érdekeltségi feltételeket kielégítő járadékfüggvényt.

A $(b_t, R_t)_{t=S}^T$ szabály érdekeltségi feltételei azt jelentik, hogy minden t-típusnak saját (b_t, R_t) szerződését érdeke választania a lehetőségekből. A szomszédos érdekeltségi feltételek a következők. A t-típusnak nem érdemes $t + 1$-típusnak hazudnia magát, és fordítva: $t = S, \ldots, T - 1$,

$$v_t \geq [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})t = v_{t+1} - w(b_{t+1}),$$
$$v_{t+1} \geq [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)(t+1) = v_t + w(b_t),$$

azaz

$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}), \qquad \text{ahol} \qquad t = S, \ldots, T - 1.$$

A $w(\cdot)$ növekvő voltából következik $b_t \le b_{t+1}$ (ahonnan bonyolultabban következik $R_t \le R_{t+1}$). Emellett a felső korlátok és a nem szomszédos korlátok elhagyhatók, valamint elegendő az alsó egyenlőtlenséget egyenlőségre venni.

A társadalmi tervező feladata a következő:

$$\max_{(b_t, R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t,$$

feltéve, hogy

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t, \qquad z_t = (\tau + b_t)R_t - tb_t, \qquad t = S, \ldots, T;$$

$$\sum_{t=S}^{T} z_t f_t = 0;$$

$$v_{t+1} = v_t + w(b_t), \qquad t = S, \ldots, T-1.$$

Ezt a feladatot a társadalmi tervező *második legjobb újraelosztó feladatának* nevezzük, és ezt elemezzük a továbbiakban. Mivel a kvalitatív eredmények markánsan különböznek az *utilitarista* és az *általánosított utilitarista* esetben, két részre bontjuk az elemzést.

Utilitarista megoldás. Tegyük föl, hogy a társadalmi jóléti függvény utilitarista: $\psi' \equiv 1$. Ekkor egy meglepő eredményt kapunk (1. tétel).

1. tétel. *Ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, és $R^* < S$ érvényes, akkor a második legjobb újraelosztó járadékszabály teljesen merev:*

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^*; \\ b^*, & \text{ha } R \ge R^*. \end{cases} \tag{5}$$

Sőt, ez a szabály megvalósítja az első legjobb kimenetelt.

Megjegyzés. A későbbi 5. tétel miatt érdemes megjegyeznünk, hogy ellentétben az első legjobb utilitarista megoldással, nincs más második legjobb utilitarista megoldás. Valóban, ha lenne, akkor az is első legjobb megoldás lenne, de a 0. tétel szerint itt minden típus nyugdíja azonos, és az érdekeltségi feltételek miatt ezért a szolgálati időknek is azonosaknak kellene lenniük.

Paradox módon a rugalmas nyugdíjazásra kapott második legjobb megoldás meglehetősen merev: mindenki ugyanannyi ideig dolgozik. Ez a paradoxon az utilitarista társadalmi jóléti függvény következménye, ezért egyelőre elvetjük ezt a feltevést.

Általánosított utilitarista megoldás. Legyen ψ szigorúan konkáv! Az optimális utilitarista szabályok továbbra is megengedettek, és kielégítik az érdekeltségi feltételeket, de már társadalmilag nem optimálisak. Valóban, akármilyen kevéssé szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényt mérlegelünk, az utilitarista optimum túlságosan sokat csoportosít át a várhatóan rövid életűektől a hosszú életűeknek. Másképpen kifejezve: az az elosztás, amelyik minden munkást ugyanannyi szolgálati idővel és ugyanannyi nyugdíjjal küld nyugdíjba, méltánytalannak tűnik egy olyan társadalomban, ahol a szerencsétlenebb (rosszabb génekkel született s emiatt várhatóan rövidebb életű) egyének haszna nagyobb súlyt kap. Ugyanakkor az első legjobb általánosított utilitarista megoldások nem elégítik ki az érdekeltségi feltételeket, hiszen azonos járadék és különböző szolgálati idők esetén mindenki legrövidebb idejű típusnak hazudná magát.

A második legjobb feladat megoldása céljából újrafogalmazzuk a feladatot *Mirrlees* [1986] (6. szakasz) változócsere-módszerével. Legyen a t-típus szolgálati ideje

$$R_t = R(v_t, b_t, t) = \frac{w(b_t)t - v_t}{w(b_t) - \bar{u}}, \tag{6}$$

és az életpálya nettó járuléka vagy egyenlege

$$z_t = z(v_t, b_t, t) = (\tau + b_t)R(v_t, b_t, t) - tb_t. \tag{7}$$

Az átalakított feladat

$$\max_{(b_t, v_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=S}^{T} z(v_t, b_t, t) f_t = 0,$$

$$v_{t+1} - v_t - w(b_t) = 0, \qquad t = S, \ldots, T-1.$$

Rendeljük λ-t az első korláthoz, és $(\mu_t)_t$ -t a korlátok második csoportjához! Ekkor a Lagrange-függvény a következő:

$$L = \sum_{t=S}^{T} [\psi(v_t) + \lambda z(v_t, b_t, t)] f_t + \sum_{t=S}^{T-1} \mu_t [v_{t+1} - v_t - w(b_t)].$$

Szokásos meggondolással adódik a 2. tétel.

2. tétel. *A második legjobb újraelosztás elsőrendű szükséges feltételei $t = S, \ldots, T$ esetén,*

$$L'_{b_t} = \lambda z'_b(v_t, b_t, t) f_t - \mu_t w'(b_t) = 0,$$

$$L'_{v_t} = [\psi'(v_t) + \lambda z'_v(v_t, b_t, t)] f_t - \mu_t + \mu_{t-1} = 0, \qquad t < T,$$

$$L'_{\mu_t} = v_{t+1} - v_t - w(b_t) = 0,$$

$$L'_{\lambda} = \sum_{t=S}^{T} z(v_t, b_t, t) f_t = 0,$$

ahol $\mu_{S-1} = 0$ *és* $\mu_T = 0$.

Következmény. *A második legjobb újraelosztási optimumban a leghosszabb várható élettartamú egyének járadéka első legjobb: $\hat{b}_T = b^*$. Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $\hat{b}_T < b^*$ minden $t < T$-re, azaz a leghosszabb várható élettartamú egyénektől eltekintve, mindenki kevesebbet kap, mint amekkora az első legjobb járadék. A második legjobb szolgálati idők közül a legrövidebb kisebb, a leghosszabb nagyobb a korcentrumnál: $\hat{R}_S < R^* < \hat{R}_T$.*

Második legjobb semleges megoldás

Röviden felidézzük a második legjobb semleges megoldást (*Simonovits* [2004*a*]). Itt a (b_t, R_t) pár két összetevője a következő kapcsolatban van egymással: $z_t = \tau R_t - b_t(t - R_t) = 0$. Ekkor sokkal egyszerűbb a második legjobb megoldás kiszámítása, mint az újraelosztás esetén, sőt, társadalmi jóléti függvényre sincs szükség. Csak az életpálya-hasznosság szorzóját kell bevezetnünk:

$$\varphi(b) = \frac{ub + w(b)\tau}{\tau + b}, \qquad v_t = \varphi(b_t)t.$$

3. tétel. *Létezik a második legjobb semleges szabály, ahol a járadéksorozat kielégíti a következő implicit differenciaegyenletet:*

$$(t+1)\varphi(\overline{b}_{t+1}) - t\varphi(\overline{b}_t) - w(\overline{b}_t) = 0, \qquad \text{ahol} \quad t = S, \ldots, T-1; \ \overline{b}_T = b^*.$$

Sőt, $\overline{b}_T > \overline{b}_{T-1} > \cdots > \overline{b}_S$.

Új eredmények

A következőkben bemutatjuk kutatásaink újabb eredményeit. Három kérdésre keressük a választ. Miért van szükség újraelosztásra? Miért nem egyértelmű a második legjobb megoldás? Hogyan lehet minimalizálni az újraelosztást?

Miért van szükség újraelosztásra?

Már a bevezetésben megemlítettük, hogy az optimális mechanizmustervezés általában újraelosztási rendszereket vizsgál, bár a többi megközelítés semleges rendszereket mérlegel. Most belátjuk, hogy az ésszerű nyugdíjmechanizmusok meglehetősen széles körében a semlegesség megvalósíthatatlan, sőt, az egyéni egyenleg csökkenő függvénye a várható élettartamnak: z_t csökkenő függvénye t-nek. Kiemeljük, hogy ezen a ponton nem támaszkodunk a társadalmi jóléti függvényre. Ez egyrészt általánosabbá teszi eredményünket, másrészt nem vezeti le a modellből, hogy miért teljesül az optimumra a kirótt feltevés.

4. tétel. *Ha az egymást követő nyugdíjak sorozata nem csökkenő, és a szolgálati idők különbsége kisebb, mint a rövidebbhez tartozó nyugdíj és a járulék plusz a nyugdíj hányadosa:*

$$b_t \le b_{t+1} \quad \text{és} \quad 0 < R_{t+1} - R_t \le \frac{b_t}{\tau + b_t} < 1, \qquad t = S, \ldots, T-1$$

akkor az egyéni egyenlegek csökkenő függvényei a várható élettartamoknak:

$$z_S > \ldots > z_t > z_{t+1} > \ldots > z_T.$$

Megjegyzések. 1. Láttuk, hogy a második legjobb megoldásokban teljesül a nyugdíj és az élettartam közötti összefüggés nem csökkenő volta. Félreértések elkerülése érdekében leszögezzük, hogy a második feltétel bal oldalán nem egyszerű különbség, hanem különbségi *hányados* áll: a szolgálati idők különbségét osztani kell a várható élettartamok különbségével. Esetünkben ez a különbség 1 időszak (év, hónap stb.), ezért lemondunk jelöléséről.

2. A gyengébb $R_{t+1} - R_t < 1$ követelmény eléggé természetesnek tűnik (vö. *Simonovits* [2004*a*]). Ha két szomszédos típust hasonlítunk össze, akkor egy ésszerű rendszerben a hosszabb típus egyévnyi többletélettartamért nem büntethető több mint egyévnyi többletszolgálattal. (Ez hasonló ahhoz, amikor a Mirrlees-féle optimális személyi jövedelemadóban a nagyobb bruttó keresetű nem fizethet kisebb adót.) A tételben szereplő

szigorúbb megkötés sem túlságosan erős, mindenesetre egyenlőségre teljesül a korábbi 0. tételhez fűzött, R_t^N-re vonatkozó 2. megjegyzésben. A numerikus szemléltetésben a feltevés teljesül.

3. A 4. tételből következik, hogy a leghosszabb várható élettartamú csoport várható egyenlege negatív: $z_T < 0$; és a legrövidebbé pozitív: $z_S > 0$. Ellenkező esetben $Z > 0$ vagy $Z < 0$ volna; ellentmondva a $Z = 0$ feltételnek.

Bizonyítás. Írjuk föl, hogy $z_{t+1} = (\tau + b_t)R_{t+1} - b_{t+1}(t + 1)$, és vezessük be a $z_{t+1} = z_t + \Delta z_t$, $b_{t+1} = b_t + \Delta b_t$ jelöléseket. Egyszerű számolással adódik a feltétel $\Delta z_t < 0$-ra:

$$(\tau + b_t)\Delta R_t + \Delta R_t \Delta b_t < b_t + (t + 1 - R_t)\Delta b_t.$$

Mivel $\Delta R_t < t + 1 - R_t$, ezért a kiemelt egyenlőtlenség bal oldalának első és második tagja kisebb, mint a jobb oldal megfelelő tagjai. ■

Miért nem egyértelmű a második legjobb megoldás?

Az *Eső–Simonovits* [2003] cikk nem foglalkozott a második legjobb megoldás egyértelműségével. Az igazat megvallva, annak idején a cikk szerzői örültek, hogy találtak legalább egy megoldást. Az elméletileg legfontosabb kétszereplős esetben (*Simonovits* [2004*a*]) könnyen látható, hogy egyetlenegy megoldás létezik. Amikor azonban évekkel később a 11-típusú modellben egy másik megoldást is találtunk, elkerülhetetlenné vált a kérdés alaposabb vizsgálata.

5. tétel. *Legyen a különböző típusok száma nagyobb, mint kettő: $n > 2$! Minden második legjobb megoldás környezetében létezhet vele azonos társadalmi jólétű megoldásoknak egy egész serege, amelynek dimenziója $n - 2$.*

Bizonyítás. Legyen $(\hat{v}_t, \hat{b}_t)$ egy tetszőleges második legjobb újraelosztó megoldás. Vegyünk egy tetszőleges monoton növekvő $(v_t)_t$ sorozatot, amelyre $V = \hat{V}$, továbbá legyen az új sorozat eléggé közel $(\hat{v}_t)_t$-hoz. Ekkor v_T-t egyértelműen meghatározza $(v_S, \ldots, v_{T-1})$. Az érdekeltségi feltételekből $w(b_t) = v_{t+1} - v_t$, $t = S, \ldots, T - 1$, azaz $w(\cdot)$ inverzét $w^{-1}(\cdot)$-vel jelölve a nyugdíjak értéke $b_t = w^{-1}(v_{t+1} - v_t)$, kivéve a $b_T = b^*$ esetet. Ekkor (6) adja a megfelelő $(R_t)_t$ szolgálati időket. Vegyük azonban figyelembe, hogy v_T-n kívül még egy v_t, mondjuk v_{T-1} értéke valójában kötött, mert a hozzá tartozó (b_{T-1}, R_{T-1})-nek kell biztosítania $Z = 0$-t, élve azzal az ártatlannak tűnő feltevéssel, hogy az implicit függvényekről szóló tétel $Z'_{v_{T-1}} \neq 0$ feltétele teljesül. ■

Megjegyzések. 1. Az 1. tételhez fűzött megjegyzésben utaltunk arra, hogy a legegyszerűbb, utilitarista esetben csak egyetlenegy második legjobb megoldás létezik. Tehát valóban csak lehetőségről, és nem bizonyosságról van szó. Hamarosan látjuk majd az *1. táblázatban*, hogy az utilitarista esetben $Z'_{v_{T-1}} \approx 0$, s emiatt a gyakorlatban az algoritmus a nem megengedett $Z < 0$ megoldást adja. De a hiba elhanyagolhatóan kicsiny. A többi társadalmi jóléti függvénynél viszont már a kiindulás is csak közelítő lehet, ezért erről nincs mit mondanunk.

2. Természetesen $n = 2$-re nincs szabad változó.

Hogyan lehet minimalizálni az újraelosztást?

Beláttuk, hogy az utilitarista megoldás a gyakorlatban nem is olyan merev, és az újraelosztás is mérsékelhető. Ekkor nem érdemes bajlódni a nem utilitarista társadalmi jóléti függvényekkel, inkább mérlegeljük az újraelosztás minimalizálását. Mivel az újraelosztás foka közvetlenül nem függ az egyéni életpálya-hasznosságoktól, ez nem igazi Bergson–Samuelson-féle jóléti függvény, de kormányzati célfüggvényként elfogadható.

A módosított matematikai feladat a következő. A $(b_t, R_t)_t$ pozitív valós számokat kell optimálisan meghatározni a következő két célfüggvényes programozási feladatban:

$$V = \sum_{t=S}^{T} v_t f_t, \qquad \text{és} \qquad D^2 = \sum_{t=S}^{T} z_t^2 f_t,$$

feltéve, hogy

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t, \qquad z_t = (\tau + b_t)R_t - tb_t, \qquad t = S, \ldots, T-1,$$

$$Z = \sum_{t=S}^{T} z_t f_t = 0,$$

$$v_{t+1} = v_t + w(b_t), \qquad t = S, \ldots, T-1,$$

Most v_t-*k* helyett b_t-ket választjuk „szabadon", és a többi változót fejezzük ki b_t-kel. Tehát legyen tetszőleges pozitív elemű (nem feltétlenül szigorúan), monoton növekvő $b_S, b_{S-1}, \ldots, b_T$ sorozat, ahol $w(b_S) > \bar{u}$, $b_T = b^*$, és csapjunk hozzá egy $R_S > 0$ számot. Helyettesítsük be a $v_{t+1} = v_t + w(b_t)$ egyenletbe a $v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t$ és $v_{t+1} = [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})(t+1)$ definíciókat:

$$[\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})(t+1) = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)(t+1).$$

Fejezzük ki R_{t+1}-et R_t segítségével:

$$R_{t+1} = \frac{[w(b_{t+1}) - w(b_t)](t+1) + [w(b_t) - \bar{u}]R_t}{w(b_{t+1}) - \bar{u}}, \qquad t = S, \ldots, T-1$$

Korábbi választásunk szerint mind a $2(T-S+1)$ számú döntést meghatároztuk, azonban R_S értékét utólag megszabja a $Z = 0$ feltétel. Ekkor a két célfüggvény értéke valóban csak a $b_S, b_{S+1}, \ldots, b_T$ sorozattól függ.

Két eljárást követünk: *1.* Kiválogatjuk a hatékony vagy domináns (V, D) párok halmazát, azaz azokat a párokat, amelyekhez nem található olyan (V', D') megoldás, amely dominálja valamelyiküket. Képletben: egy (V, D) pár *hatékony vagy domináns*, ha nem létezik olyan (V', D') pár, amelyre $V' \geq V$, $D' \leq D$, és amelyben legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú. *2.* Önkényesen választunk egy $\delta > 0$ büntetési együtthatót, és maximalizáljuk a $V - \delta D^2$ célfüggvényt, majd δ-t változtatgatva, tanulmányozzuk az optimumok seregét. Az azonban egyik eljárásból sem látható, hogy ismét végtelen sok optimum létezik. (Puristák számára egy harmadik eljárás is ajánlható: a társadalmi jóléti függvény maximalizálásakor többletfeltételként korlátozzuk az újraelosztást: $D^2 \leq d$, alkalmas $d > 0$ állandóra.)

Numerikus szemléltetés

Rátérünk a numerikus szemléltetésre (vö. *Eső–Simonovits* [2004]). Legyen a nyugdíjas időszakos hasznosságfüggvény CRRA-alakú, $w(x) = \theta - x^\sigma/\sigma$, $1 - \sigma$ lévén a relatív kockázatkerülési együttható és ε a munkaáldozat. Numerikus paraméterek: $\theta = 4{,}1$; $\sigma = -0{,}5$ és $\varepsilon = 1{,}3975$. Ekkor $\tau = 0{,}2$ esetén $b^* = 1 - \tau = 0{,}8$. Egy ponton szükségünk lesz a társadalmi jóléti függvények CRRA-típusú családjára: $\psi(v) = v^\rho / \rho$, $\rho \le 1$, és ρ-t a *társadalmi jólét egyenlőtlenségi indexének* nevezzük. Minél kisebb az index, annál nagyobb súlyt kapnak a kisebb hasznosságok, azaz annál egyenlősítőbb a rendszer.

A típusok eloszlása egyenletes: $f_t \equiv 1/n$. Először csak a háromtípusú esettel foglalkozunk: $n = 3$, $S = 5 \times 10$, $T = 5 \times 12$, alig térve el az *Eső–Simonovits* [2003]-beli $S = 49$ és $T = 59$ értékektől. Egy kivételtől eltekintve, csak az utilitarista esettel foglalkozunk.

Majdnem ekvivalens megoldások

Először bemutatjuk az 5. tétel majdnem ekvivalens megoldásait. A pontosság miatt eredményeinket kivételesen 4 tizedes jegyre mutatjuk be *(1. táblázat)*.

Az első (dőlt) sor a kiinduló utilitarista optimum (0. és 1. tétel), kerekítési hibától eltekintve elvileg pontos, jele: *. A többi sorban a szabadon választott v_{50} nagyon közel van v^*_{50}-hoz, de például az utolsó sorokban b_{50} már elég távol van b^*_{50}-tól! Igaz, hogy $Z < 0$, bár csak nagyon kevéssé! Emlékeztetjük az Olvasót, hogy az 5. tétel ebben az esetben elvileg nem érvényes, de gyakorlatilag igen.

Mostantól kezdve lemondunk a jóléti ekvivalenciáról, de nagy gondot fordítunk az újraelosztás mérséklésére. Két eljárást is alkalmazunk: a hatékony párok meghatározását és a büntetőfüggvények módszerét.

Hatékony párok meghatározása

Előállítjuk a két célváltozót egy bizonyos téglalap megfelelő beosztású rácspontjain, például $b_{50} = 0{,}44$-től b_{55}-ig, $b_{55} = 0{,}5$-től 0,8-ig 0,02 lépésközzel, valamint $R_{50} = 34{,}4$ (kivéve az első sort, ahol a pontosabb közelítés miatt 34,36-tal indítunk), 0,1-es lépésközzel. Kidobáljuk azokat a (V, D) kimeneteket, amelyek nem hatékonyak, más szóval: domináltak.

A *2. táblázat* tartalmazza a futások eredményét.

A *2. táblázat*ot egy kettős vonal vágja ketté. A felső rész tartalmazza a hatékony megoldásokat, legtetején a semleges második legjobb megoldás, legalján az utilitarista második legjobb megoldás áll. Vegyük észre, hogy fentről lefelé haladva milyen gyorsan nő D^2, és milyen lassan nő V. Valószínűleg érdemes a felső rész közepéből választani, például a dőlt sort. Lehet akár a táblázat 1. sorát, a semleges megoldást választani, de akkor a jólét jelentősen kisebb. Az alsó rész 1. sorában szereplő „méltányosnak” nevezett megoldás valójában nagyon méltánytalan, és rossz hatékonyságú: a szórásnégyzete 26 százalékkal nagyobb a merev rendszerénél, és a jóléti érték is elmarad a merevétől. A 2. sorban szereplő megoldás az *Eső–Simonovits* [2003]-féle hiperbolikus ($\rho = -1$) társadalmi jóléti függvény második legjobb megoldása éppen a dőlt sort közelíti.

Az utolsó oszlopban a legrövidebb várható élettartamú egyének v_{50} életpálya-hasznossága szerepel, felülről lefelé haladva ez először nő, majd csökken a szórásnégyzet növekedésével, a választóvonal a $b_{50} = 0{,}5$ kezdetű sor, ahol v_{50} eléri maximumát, 33,21-et. Az efölötti rész már a Pareto-rontás tartománya.

1. táblázat
Majdnem ekvivalens megoldások három típusra

Életpálya-hasznosság			Nyugdíj			Szolgálati idő			Várható egyenleg
rövid v_{50}	átlagos v_{55}	hosszú v_{60}	rövid b_{50}	átlagos b_{55}	hosszú b_{60}	rövid R_{50}	átlagos R_{55}	hosszú R_{60}	Z
31,7066	*41,0263*	*50,3459*	*0,8000*	*0,8000*	*0,8000*	*44,0000*	*44,0000*	*44,0000*	*0,0000*
31,7566	41,0263	50,2959	0,7929	0,7929	0,8000	43,9207	43,9207	44,0358	–0,0003
31,8066	40,9763	50,2959	0,7790	0,8000	0,8000	43,7952	44,0358	44,0358	–0,0009
31,8066	41,0263	50,2459	0,7859	0,7859	0,8000	43,8403	43,8403	44,0716	–0,0011
31,8566	40,9763	50,2459	0,7721	0,7929	0,8000	43,7127	43,9568	44,0716	–0,0017
31,8566	41,0263	50,1959	0,7790	0,7790	0,8000	43,7587	43,7587	44,1073	–0,0025
31,9066	40,9763	50,1959	0,7654	0,7859	0,8000	43,6289	44,1073	44,1073	–0,0032
31,9066	40,9263	50,2459	0,7587	0,8000	0,8000	43,5813	44,0716	44,0716	–0,0036

2. táblázat

Hatékony megoldások három típusra

Nyugdíj			Szolgálati idő			Társadalmi jólét	Egyenleg szórása	Hasznosság rövid
rövid	átlagos	hosszú	rövid	átlagos	rövid			
b_{50}	b_{55}	b_{60}	R_{50}	R_{55}	R_{60}	V	D^2	v_{50}
0,44	0,50	0,80	34,36	39,34	48,00	38,69	0	32,96
0,46	0,54	0,80	35,70	40,51	47,28	39,23	0,30	33,10
0,48	0,56	0,80	36,80	40,85	46,83	39,58	0,82	33,16
0,50	0,58	0,80	37,70	41,17	46,43	39,90	1,49	33,21
0,52	0,62	0,80	38,50	42,02	45,93	40,21	2,46	33,19
0,52	0,66	0,80	38,60	42,96	45,71	40,26	2,95	33,11
0,52	0,68	0,80	38,60	43,32	45,58	40,32	3,19	33,11
0,52	0,70	0,80	38,60	43,65	45,46	40,38	3,43	33,11
0,54	0,68	0,80	39,30	43,15	45,43	40,44	3,75	33,06
0,54	0,70	0,80	39,30	43,48	45,31	40,50	4,00	33,06
0,56	0,68	0,80	39,90	42,99	45,29	40,56	4,31	33,01
0,60	0,64	0,80	40,90	41,92	45,33	40,60	4,84	32,87
0,60	0,66	0,80	40,90	42,35	45,20	40,66	5,09	32,87
0,60	0,72	0,80	41,00	43,47	44,90	40,73	5,87	32,66
0,62	0,70	0,80	41,40	43,03	44,91	40,75	6,10	32,71
0,64	*0,72*	*0,80*	*41,80*	*43,28*	*44,72*	*40,83*	*6,82*	*32,60*
0,68	0,68	0,80	42,40	42,40	44,78	40,88	7,11	32,50
0,70	0,76	0,80	42,80	43,68	44,36	40,96	8,56	32,25
0,72	0,78	0,80	43,10	43,90	44,23	40,98	9,18	32,11
0,80	0,80	0,80	44,00	44,00	44,00	41,00	10,67	31,68
0,59	0,79	1,19	42,35	44,95	47,90	40,21	13,42	31,24
0,66	0,72	0,80	42,12	43,18	44,65	40,90	7,22	32,55

Mennyire meghatározott a második legjobb megoldás? Elvileg igen, de gyakorlatban nem. Ennek szemléltetésére tekintsük a *2. táblázat* dőlt sorának azt a környezetét, amelybe azok a futások tartoznak, amelyeknek a jóléti értéke közelebb van, mint a táblázatban egy sorral feljebbihez ($V \geq 40{,}79$), illetve a szórásnégyzete közelebb van, mint az egy sorral lejjebbihez ($D^2 \leq 6{,}96$).

Nem egyértelmű a kép, de talán elmondhatjuk: elég nagy a bemeneti adatokban az ingadozás a közel azonos várható értékű és szórásnégyzetű futások között *(3. táblázat)*. Míg $40{,}80 \leq V \leq 40{,}88$ és $6{,}16 \leq D^2 \leq 6{,}87$; addig a legrövidebb várható élettartamúak nyugdíja 0,60 és 0,66 között ingadozik, a közepes várható élettartamúaké pedig 0,68 és 0,78 között. Hasonlóan jelentős az ingadozás a szolgálati évekre is: 41–42,1, illetve 42,5–44,3; végül szűk a leghosszabb típus szolgálati idejére: 44,6–44,8 év, és a legrövidebb típus életpálya-hasznosságára: 32,50–32,79.

3. táblázat
Egy hatékony megoldás környezete három típusra

Nyugdíj			Szolgálati idő			Társadalmi jólét	Egyenleg szórása	Hasznosság rövid
rövid b_{50}	átlagos b_{55}	hosszú b_{60}	rövid R_{50}	átlagos R_{55}	rövid R_{60}	V	D^2	v_{50}
0,60	0,74	0,80	41,00	43,75	44,78	40,80	6,12	32,79
0,60	0,78	0,80	41,10	44,32	44,64	40,80	6,62	32,68
0,62	0,72	0,80	41,40	43,35	44,79	40,83	6,36	32,73
0,62	0,76	0,80	41,50	43,98	44,64	40,83	6,87	32,62
0,64	0,70	0,80	41,80	42,96	44,85	40,80	6,55	32,62
0,64	*0,72*	*0,80*	*41,80*	*43,28*	*44,73*	*40,86*	*6,82*	*32,62*
0,66	0,68	0,80	42,10	42,49	44,86	40,83	6,71	32,58

A büntetőfüggvény maximalizálása

Határozott-e az optimum, ha a $V - \delta D^2$ büntetőfüggvényt maximalizáljuk? Három típus esetére elvileg igen, de öt típus esetére már nem. Mindenekelőtt megoldjuk a feladatot a 2. tétel megfelelő módosítással vagy a *Mathematica*-szoftver segítségével $n = 5$ esetére. Legyen az $S = 5 \times 10$, $T = 5 \times 14$, azaz a várható élettartamok 50 és 70 év között oszlanak el egyenletesen, 5 éves kihagyásokkal. (Lehetett volna más S és T értékeket is választani, kisebb átlagos élettartammal vagy sűrűbb beosztással.) A *4. táblázatban* két büntetőtényező, $\delta = 0{,}02$ és 0,04 mellett számoljuk ki a második legjobb megoldásokat. (Mivel V és D^2 nem homogén, a skálaváltozásnál az 5-tel való szorzásnál δ-t is 5-tel kell szorozni, hogy a célfüggvény mindkét tagja 5-tel szorzódjon!) Érdekes, hogy $\delta = 0{,}042$ esetén már sérül az $R_T < S$ feltétel. Mivel csak két megoldást mutatunk be, a korábbiakkal ellentétben, a különféle típusok nem oszlopokban, hanem sorokban helyezkednek el.

4. táblázat
Két második legjobb megoldás öt típusra

	$\delta = 0{,}02$			$\delta = 0{,}04$		
Élettartam t	hasznosság v_t	nyugdíj b_t	szolgálat R_t	hasznosság v_t	nyugdíj b_t	szolgálat R_t
50	27,682	0,652	46,210	28,624	0,584	44,762
55	35,794	0,700	46,828	36,036	0,636	45,756
60	44,343	0,738	47,458	43,995	0,694	47,001
65	53,205	0,771	48,107	52,492	0,751	48,249
70	62,317	0,800	48,753	61,500	0,800	49,374

Mindkét megoldás közgazdaságilag értelmes, az újraelosztást jobban büntető esetben (a *4. táblázat* jobb oldala) a rendszer rugalmasabb, jobban széthúzódik a nyugdíj (0,58 – 0,8) és a szolgálati idő (44,8–49,4 év), mint a másikban (0,65–0,8, illetve 46,2–48,8 év). Ebben a semlegesebb esetben az életpálya-hasznosságok a rövidebb életűek esetén jobbak, de v_t már az átlagos élettartamú fogyasztó esetén is kisebb, mint az inkább újraelosztó megoldásban.

Mennyire robusztusak az öt típusról szóló eredményeink? Ennek megállapításához határozzuk meg a $\delta = 0{,}04$ büntető-együtthatóhoz tartozó második legjobb megoldás körül azokat a megoldásokat, amelyekre a W büntetőfüggvény majdnem maximális, például csak az utolsó tizedes jegyben tér el 1 jeggyel: $W_{max} = 43{,}76 \geq W \geq 43{,}75$. Válaszuk ki közülük a rácspontokat, és az áttekinthetőség kedvéért csak azokat a sorokat tartsuk meg, amelyekben legalább az egyik változó minimális vagy maximális!

A második legjobb megoldás körül ismét nagyon tág környezetben adódnak közel ugyanolyan jó megoldások *(5. táblázat)*. Ugyanakkor a rácsbeosztás durvasága miatt a második legjobb megoldás kerekítése nem is szerepel a kiválasztottak közül, helyette egy hozzá közel fekvő rácspontot emelünk ki dőlt számmal. Valóban, b_{50} 0,56 és 0,61 között ingadozik, b_{55} 0,61 és 0,67 között. Némileg szűkebbek a hosszabb várható élettartamúak nyugdíjának tartományai: $0{,}68 \leq b_{60} \leq 0{,}72$ és $0{,}73 \leq b_{65} \leq 0{,}77$. A szolgálati idők ingadozása még szűkebb, de ennek elemzését az Olvasóra bízzuk.

5. táblázat
Egy második legjobb megoldás környezete öt típusra

Nyugdíj–élettartam				Szolgálatiidő–élettartam				
50 b_{50}	55 b_{55}	60 b_{60}	65 b_{65}	50 R_{50}	55 R_{55}	60 R_{60}	65 R_{65}	70 R_{70}
0,56	0,63	0,69	0,77	44,25	45,73	47,03	48,74	49,39
0,56	0,64	0,68	0,75	44,25	45,89	46,76	48,36	49,49
0,57	0,62	0,72	0,77	44,50	45,55	47,62	48,62	49,28
0,57	0,64	0,70	0,73	44,50	45,88	47,12	47,81	49,47
0,57	0,65	0,68	0,73	44,50	46,03	46,67	47,87	49,53
0,58	0,63	0,72	0,77	44,75	45,73	47,55	48,55	49,21
0,58	*0,65*	*0,69*	*0,75*	*44,75*	*46,04*	*46,87*	*48,22*	*49,36*
0,58	0,65	0,70	0,73	44,75	46,04	47,06	47,75	49,41
0,59	0,61	0,68	0,77	44,75	45,16	46,82	48,79	49,44
0,59	0,67	0,68	0,75	45,00	46,35	46,55	48,17	49,31
0,61	0,65	0,68	0,74	45,25	45,93	46,57	47,99	49,39

Összefoglalva: a várható értéket maximalizáló és a szórást minimalizáló eljárásunk már az 5-típus esetén is kevés eligazítást ad a választáshoz. Ismét a bőség zavarával állunk szemben. Több kiút is lehetséges. Például, ha figyelembe vesszük, hogy az életkorral együtt nő a munkaáldozat, akkor a szolgálati időben lineáris hasznosságfüggvényünk kvadratikussá válik, és talán megszabadulunk a határozatlanságtól. Csakhogy a bonyolultabb modell végképpen elzárja az analitikus lehetőségeket, ezért erről lemondunk.

Következtetések

Ebben a dolgozatban visszatértünk egy korábbi cikksorozatunkra. Most is a mechanizmustervezést alkalmaztuk az optimális nyugdíjjáradék–szolgálatiidő-függvény kiszámítására, feltételezve, hogy az egyének többet tudnak saját várható élettartamukról, mint a kormányzat. Három ponton léptünk tovább. *1*. Bemutattuk, hogy a várhatóan rövid életűektől a várhatóan hosszú életűeknek történő újraelosztás ésszerű nyugdíjrendszerekben – ahol a szolgálati idő csak mérsékelten nő a várható élettartammal – elkerülhetetlen. *2*. Felhívtuk a figyelmet arra a zavaró körülményre, hogy a második legjobb újraelosztó megoldások közel sem egyértelműek, ezért óvatosan kell bánni a paraméteres vizsgálatokkal. *3.* Az utilitarista társadalmi jóléti függvény esetén korábban kapott második legjobb megoldás merevsége jól feloldható, ha az újraelosztás mérséklését közvetlenül, az egyéni egyenlegek szórásminimalizálásakor célként tűzzük ki.

Most is érvényesek korábbi figyelmeztetéseink: „Szimulációink azonban elsiklottak számos fontos részlet, például a munkaáldozat heterogeneitása és a személyi jövedelemadó fölött. ... További kutatásokra van szükség a kísérleti eredmények tisztázására." (*Eső–Simonovits* [2003] 111. o.)

Hivatkozások

ARROW, J. K.–INTRILLIGÁTOR, M. D. (szerk.) [1986]: Handbook of Mathematical Economics. Vol. III., Elsevier Science Publisher.

BOMMIER, A.–LEROUX, M.-L.–LOZACHMEUR, J.-M. [2006]: Differential Mortality and Social Security, korábbi változat, ESEM 2006, bécsi konferenciájának honlapján szerepel.

ESŐ PÉTER–SIMONOVITS ANDRÁS [2002]: Designing Optimal Benefit Rules for Flexible Retirement, Discussion Paper CMS-EMS 1535, Northwestern University, Evanston, IL.

ESŐ PÉTER–SIMONOVITS ANDRÁS [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre. Közgazdasági Szemle, 2. sz. 99–111. o.

MAS-COLELL, A.–WHINSTON, M. D.–GREEN, J. R. [1995]: Microeconomic Theory. Oxford University Press, New York, Oxford.

MIRRLEES, J. A. [1986]: The Theory of Optimal Taxation. Megjelent: *Arrow, K. J.–Intrilligator, M. D.* (szerk.): Handbook of Mathematical Economics. North-Holland, Amszterdam, 1197–1249. o.

PÁL LÁSZLÓ–CSENDES TIBOR [2007]: Improvements on the Global Optimization Algorithm with Numerical Test, 7th International Conference on Applied Informatics, Eger.

SIMONOVITS ANDRÁS [2004*a*]: Optimális rugalmas nyugdíjrendszer tervezése: Biztosításmatematikai semlegesség és hatékonyság. Közgazdasági Szemle, 12. sz. 1101–1112. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [2004*b*]: Rugalmas öregkori nyugdíjkorhatár optimális tervezése két típus esetén. Szigma, 35. 15–40. o.