Közgazdasági Szemle, LIII. évf., 2006. július–augusztus (624–640. o.)

OTTUCSÁK GYÖRGY–VAJDA ISTVÁN

Empirikus portfólióstratégiák

A cikk olyan új szekvenciális befektetési stratégiákat mutat be, amelyek általános feltételek mellett garantálják a befektető számára az aszimptotikusan optimális hozamszint elérését. A stratégiák analitikus és empirikus tulajdonságait is áttekintjük. Az analitikus eredmények rámutatnak arra, hogy a stratégiák aszimptotikus hozamszintje stacionárius és ergodikus piacokon egybeesik a logoptimális hozamszinttel, amelyet csak a piaci árakat generáló háttérfolyamat teljes együttes eloszlásának ismeretében érhetnénk el. Összehasonlítjuk az alkalmazott modellt a hagyományos Markowitz-féle portfólióelmélettel.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11.

A cikkben a pénzügyi piacokon alkalmazható szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutatunk be. Szekvenciális stratégián olyan kauzális stratégiát értünk, amely a piacról rendelkezésre álló múltbeli adatokat használva, minden kereskedési periódus (nap) végén megváltoztathatja a portfóliót, azaz a tőkét újraoszthatja a rendelkezésre álló értékpapírok között. A befektető célja, hogy hosszú távon anélkül maximalizálja a vagyonát, hogy ismerné a részvényárfolyamokat generáló háttérfolyamat eloszlását. Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek, az ismertetett modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel az, hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus[1] folyamatot alkotnak. E feltétel mellett az aszimptotikus növekedési rátának (napi átlagos hozamszintnek) egy jól definiált maximuma van, amely elérhető a folyamat eloszlásának ismeretében (lásd *Algoet–Cover* [1988]).

Léteznek univerzálisan konzisztens módszerek (pontos definíciót lásd később), amelyek az említett aszimptotikusan optimális hozamszintet elérik anélkül, hogy bármilyen előzetes ismeretük lenne a folyamat eloszlásáról (lásd *Algoet* [1992], *Györfi–Lugosi–Udina* [2006] és *Györfi–Schäfer* [2003]). A cikkben áttekintjük azokat az univerzálisan konzisztens stratégiákat, amelyek nemcsak az optimális aszimptotikus növekedési rátát garantálják stacionárius és ergodikus folyamatok esetén, hanem (véges idejű) szimulációk esetén is jó eredményt érnek el. A szimulációk során az algoritmus teljesítményét a New York-i Értéktőzsde (NYSE) referencia-adathalmazán vizsgálták.

* A szerzők szeretnének köszönetet mondani *Györfi Lászlónak* a cikk többszöri alapos átolvasásért és hasznos tanácsaiért.

[1] Részletesen lásd *Medvegyev* [2002] 12.5.2.fejezet.

Ottucsák György a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem másodéves doktoranduszhallgatója (oti@szit.bme.hu).

Vajda István a Budapesti Corvinus Egyetem másodéves doktoranduszhallgatója (vajda@szit.bme.hu).

A szimulációs eredmények alátámasztják, hogy a javasolt módszerek képesek megtalálni és hatékonyan kiaknázni a részvényárak közötti rejtett és bonyolult összefüggéseket.

Először a logoptimális portfólióstratégiát ismertetjük, áttekintjük az alkalmazott modellek matematikai hátterét és az ahhoz kapcsolódó eredményeket. Majd mint lehetséges portfólióválasztási stratégiákat bemutatjuk a hisztogram, a magfüggvény és a legközelebbi szomszéd alapú becslőket. Ezt követően összehasonlítjuk a logoptimális és Markowitz-féle portfólióstratégiát. Végül összefoglaljuk a cikkben bemutatott eredményeket.

Matematikai modell

A cikkben vizsgált részvénypiaci modellt alkalmazta többek között *Breiman* [1961], *Algoet–Cover* [1988] és *Cover* [1991]. Tegyük fel, hogy a piacon d darab részvény van, és a tőkénket minden egyes nap elején szabadon újraoszthatjuk a részvények között. A vizsgálatok során nem használjuk a közgazdasági modellekben gyakran alkalmazott feltevést, hogy az egyik értékpapír kockázatmentes. Jelölje $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} \geq 0$, a j-edik részvény záró árainak arányát fejezi ki az adott nap és azt követő nap között. Más szóval: $x^{(j)}$ azt mondja meg, hogy az adott nap végén a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő nap végén. Az $x^{(j)}$ tehát egy 1 körüli szám.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét egy $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A $\mathbf{b}$ j-edik komponense, $b^{(j)}$ azt mondja meg, hogy a befektető a j-edik részvénybe tőkéjének hányad részét fekteti be. A cikkben feltesszük, hogy $\mathbf{b}$ portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyeknek összege 1, azaz $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszírozó, az előbbi pedig a rövidre eladási *(short sale)* üzleteket zárja ki. Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap múlva

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle,$$

ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a skalárszorzatot jelöli.

Hosszú idejű befektetések esetén a piac változását $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \in \mathbb{R}_+^d$ hozamvektor-sorozattal jellemezhetjük. Az $\mathbf{x}_i$ hozamvektor j-edik komponense, $x_i^{(j)}$, azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $k \leq i$ esetén az $\mathbf{x}_k^i$ rövidítést használjuk a hozamvektorok $(\mathbf{x}_k, \ldots, \mathbf{x}_i)$ sorozatára, és jelölje Δ_d az összes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^d$ nemnegatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$ *befektetési stratégiát* leíró függvényeknek egy sorozata

$$\mathbf{b}_i : (\mathbb{R}_+^d)^{i-1} \to \Delta_d, \quad i = 1, 2, \ldots$$

úgy, hogy $\mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort. Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben a következő jelölést használjuk $\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}) = \mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva, az n-edik nap végén a $\mathbf{B}$ befektetési stratégia tőkéje

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_i^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle} = S_0 e^{n W_n(\mathbf{B})},$$

ahol $W_n(\mathbf{B})$ az átlagos hozamszint (növekedési ráta)

$$W_n(\mathbf{B}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1}), \mathbf{x}_i \right\rangle.$$

Nyilvánvalóan, $S_n = S_n(\mathbf{B})$ maximalizálása ekvivalens $W_n(\mathbf{B})$ maximalizálásával.

A szekvenciális befektetések elméletében a piac viselkedésének modellezésére két fő megközelítés létezik. Az egyik, amikor a hozamvektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ tetszőleges értékeket vehet fel, és nincsen sztochasztikus feltevésünk a részvényárakat generáló háttérfolyamatról.[2] Az ilyen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ sorozatot individuálisnak is nevezik. Ennél a megközelítésnél az elért vagyont a referenciastratégiák (szakértők) egy osztályával hasonlítják össze. Például *Cover* [1991] a konstans újrasúlyozott portfóliók *(Constantly Rebalanced Portfolios, CRP)* osztályát vizsgálta, ahol $\mathbf{B}$ befektetési stratégiák $\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1})$ függvényei egyenlők egy fix portfólióvektorral, amely független i-től és a múlttól, $\mathbf{x}_1^{i-1}$-től is. Az adott periódusra a legjobb konstans újrasúlyozott portfóliót csak utólag lehet meghatározni, tehát ez nem kauzális stratégia. Cover megmutatta, hogy létezik $\mathbf{B}$ befektetési stratégia (úgynevezett univerzális portfólió[3]), amelynek a teljesítménye ugyanolyan jó, mint a legjobb konstans újrasúlyozott portfólió teljesítménye a következő értelemben:

$$W_n(\mathbf{B}) \geq \max_{\mathbf{C}\in\mathcal{C}} W_n(\mathbf{C}) - \left[\frac{d-1}{2n}\log n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

minden lehetséges $\mathbf{x}_1^n$ hozamvektorra, ahol $\mathcal{C}$ a konstans újrasúlyozott portfóliók osztálya. Vagyis ennek a nem előrelátó, azaz kauzális, stratégiának az átlagos hozamszintje legfeljebb egy $\dfrac{(d-1)\log n}{2n}$-es hibatagban marad el a legjobb előrelátó (nem kauzális) konstans újrasúlyozott portfólió növekedési rátájától. A lábjegyzetben említett referenciák ezt az eredményt terjesztették ki különbözőképpen.

A következő egyszerű példa demonstrálja a konstans újrasúlyozott portfóliók erejét *Helmbold és szerzőtársai* [1998].

1. PÉLDA. Legyen 2 részvény a piacon, az egyik kockázatmentes értékpapír, amelynek nincs hozama, illetve a másik egy nagy volatilitású részvény. Minden páros napon a részvény értéke megduplázódik, és minden páratlan napon a részvény értéke megfeleződik. Az első értékpapír hozamvektora 1, 1, 1, … a másodiké 1/2, 2, 1/2, 2, …. Egyenként egyik értékpapír sem tudna 2-es faktornál nagyobb hozamot realizálni, de ha pénzünket egyenlően helyezzük el a két értékpapírban, azaz az egyenletes $\mathbf{b} = (1/2, 1/2)$ portfóliót használjuk, akkor exponenciális növekedést tudunk elérni. A páratlan napokon a vagyon csökkenése $1/2\times 1 + 1/2\times 1/2 = 3/4$, míg páros napokon a növekedés $1/2\times 1 + 1/2\times 2 = 3/2$, azaz $2n$ nap után a hozam $(9/8)^n$.

A fenti megközelítés előnye, hogy nem használ a piac leírására bonyolult statisztikai modelleket, és az eredmények minden lehetséges $\mathbf{x}_1^n$ sorozatra fennállnak. Ebből a szempontból ez a megközelítés nagyon robusztus, másfelől azonban nehéz követni a referenciaosztályban lévő legjobb stratégia viselkedését. Például a legjobb konstans újrasúlyozott portfólió aszimptotikusan optimális, ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ hozamvektor-sorozat független és azonos eloszlású valószínűségi változókból álló vektorsorozatnak egy realizációja (lásd

[2] Lásd például *Cover* [1991], *Cover–Ordentlich* [1996], *Singer* [1997], *Helmbold–Schapire–Singer–Warmuth* [1998], *Ordentlich–Cover* [1998], *Vovk–Watkins* [1998, *Blum–Kalai* [1999], *Borodin–El-Yaniv–Gogan* [5], *Cesa-Bianchi–Lugosi* [2000], *Cross–Barron* [2003] és *Stoltz–Lugosi* [2003].

[3] Nem szabad összekeverni a későbbiekben bevezetésre kerülő univerzálisan konzisztens portfólióstratégiával.

lentebb). Nem jól használható viszont abban a valós piac működéshez jóval közelebb álló esetben, ha a különböző kereskedési periódusokban lévő hozamvektorok között erős, például Markov-típusú, statisztikai függések vannak. Megoldásként a szakértőknek nagyobb referenciaosztályait is vizsgálták, de hasonló korlátokba ütköztek {lásd például *Cover–Ordentlich* [1996], *Singer* [1997] és *Cross–Barron* [2003] kapcsolgatós portfóliója *(switching portfolios)*}.

A másik, szokásos megközelítés, hogy feltesszük a hozamvektorról, hogy valamilyen statisztikai modellel leírható véletlen folyamatból származik. Ennek a klasszikus nézőpontnak az az előnye, hogy minden folyamat esetén elvileg meghatározható egy optimális stratégia (részletesen lásd később), amely függ a folyamat ismeretlen eloszlásától. Mind időben, mind a részvényárak között azonban bonyolult függőségek lehetnek, amelyek nagyon megnehezítik a statisztikai modellek készítését.

A cikkben ötvözzük a fenti két megközelítést. Annak ellenére, hogy feltesszük: a hozamvektor egy véletlen folyamat realizációja, nem tételezünk fel semmilyen paraméteres struktúrát az eloszlásról vagy az időbeli függésekről. Az általunk bemutatott modell nem paraméteres statisztikán alapszik, az egyetlen feltevés, amit használunk, hogy a piac stacionárius és ergodikus, amely megenged tetszőlegesen komplex eloszlásokat. A vonatkozó eredmények fő üzenete, hogy léteznek nem paraméteres befektetési stratégiák, amelyek hatékonyan feltárják a múltbeli adatokban lévő rejtett összefüggéseket, és ezeket kiaknázva képesek gyors vagyonnövekedést elérni.

Logoptimális portfólió

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ az $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektorértékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak![4] Az *Algoet* [1992]-ben és az *Algoet–Cover* [1988]-ban meghatározott alapvető korlátok rámutattak, hogy az úgynevezett logoptimális portfólió $\mathbf{B}^* = \{\mathbf{b}^*(\cdot)\}$ a legjobb választás. Formálisan, az n-edik kereskedési periódusban jelölje $\mathbf{b}^*(\cdot)$ a logoptimális portfóliót:

$$\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\right\} = \max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\right\},$$

ahol $\mathbb{E}\{\cdot \mid \mathbf{X}_1^{n-1}\} = \mathbb{E}\{\cdot \mid \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}\}$ a múltbeli hozamvektorok szerint vett feltételes várható értéket jelenti.[5]

Ha általános esetben $S_n^* = S_n(\mathbf{B}^*)$ jelöli a $\mathbf{B}^*$ logoptimális portfólióstratégiával elért tőkét n nap után, akkor minden tetszőleges $\mathbf{B}$ befektetési stratégia által elért $S_n = S_n(\mathbf{B})$ vagyonra és $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tetszőleges stacionárius és ergodikus folyamat esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \le 0 \quad \text{1 valószínűséggel} \tag{1}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n^* = W^* \quad \text{1 valószínűséggel}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\left\{ \max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_{-\infty}^{-1}), \mathbf{X}_0\right\rangle \mid \mathbf{X}_{-\infty}^{-1}\right\}\right\}$$

a logoptimális befektetési stratégia növekedési rátája.

[4] A fenti feltételek mellett vizsgálta például *Breiman* [1961], *Algoet–Cover* [1988], *Algoet* [1992], *Walk–Yakowitz* [2002], *Györfi–Schäfer* [2003] és *Györfi–Lugosi–Udina* [2006] a portfólióválasztási problémát.

[5] Részletesen lásd *Medvegyev* [2002] 9.1.3. fejezet.

Az (1) egyenlőtlenség alapötlete a következő. Tekintsünk egy tetszőleges **B** stratégiát és a hozzá tartozó vagyont, S_n-t, ekkor az átlagos napi hozamszintet bontsuk fel a következőképpen:

$$\frac{1}{n}\log S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{2}$$

ahol

$$Z_i = \log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle - \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}$$

és

$$Y_i = \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}.$$

Ekkor Z_1, Z_2, … egy úgynevezett martingáldifferencia-sorozat,[6] amelyre igen általános feltételek mellett

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Következésképpen $\frac{1}{n}\log S_n$ aszimptotikus viselkedését az $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ összetevő viselkedése határozza meg. Ugyanakkor $\mathbf{b}^*$ definíciója miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}\\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max_{\mathbf{b}(\cdot)}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\},\end{aligned}$$

ami viszont az $\frac{1}{n}\log S_n^*$ aszimptotikus viselkedésének felel meg. Tehát nincsen olyan befektetési stratégia, amelynek aszimptotikusan nagyobb a hozamszintje, mint a logoptimális portfóliónak.

A $\mathbf{b}^*$ definíciójából következik, hogy független és azonos eloszlású piacok esetén $\mathbf{b}^*$ konstans, és $W^* = \max_{\mathbf{b}}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0\right\rangle\right\}$, ami azt mutatja, hogy ebben az esetben a logoptimális portfólió egybeesik a legjobb konstans újrasúlyozott portfólióval.[7]

Tekintsük az 1. PÉLDA egy sztochasztikus verzióját (*Cover* [1991])!

2. PÉLDA. Legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ a hozamvektor és $\mathbf{b} = (b, 1 - b)$ a portfólióvektor. Az egyik értékpapír hozama konstans 1, a másiké 2 vagy 1/2 értéket vesz fel 1/2, 1/2 valószínűséggel. Formálisan $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$, míg $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 1/2) = 1/2$. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, … független és azonos eloszlású tagokból álló sorozat! Ekkor a logoptimális portfólióban az első értékpapír aránya:

$$b^* = \arg\max_b \mathbb{E}\left\{\log\left\langle (b, 1-b), \mathbf{X}\right\rangle\right\} = \arg\max_b \mathbb{E}\{\log(b + (1-b)X_2)\}$$

[6] Részletesen lásd *Medvegyev* [2002] 9.2.3. fejezet.

[7] *Breiman* [1961], *Kelly* [1956], *Latané* [1959], *Finkelstein–Whitley* [1981], *Barron–Cover* [1988], *Morvai* [1991], [1992], *Móri* [1982], [1986] és *Móri–Székely* [1982].

$$= \arg\max_b \left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \log(2-b) \right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Azaz a logoptimális portfólió $\mathbf{b}^* = (1/2,\ 1/2)$, amelynek a napi várhatóhozama:

$$\mathbb{E}\{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{X_2\} = \frac{9}{8}.$$

Természetesen, általános esetben a logoptimális portfólió meghatározásához a folyamat (végtelen dimenziós) eloszlásának teljes ismerete szükséges. A későbbiekben azokat a befektetési stratégiákat, amelyek aszimptotikusan elérik az optimális W^* hozamszintet, az eloszlás ismerete nélkül univerzálisan konzisztensnek nevezzük. Pontosabban, egy **B** befektetési stratégiát *univerzálisan konzisztensek* nevezünk az $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatok egy osztályán, ha az osztályban minden folyamatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\mathbf{B}) = W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Megjegyzések a logoptimális portfólióhoz

Számos közgazdász nem értett egyet az $\mathbb{E}\{\log S_n\}$ mint cél maximalizálásával, és többnyire a hasznosságelmélet oldaláról indítottak támadást a logoptimális portfólióválasztás ellen. Az eddigi általános feltételekkel szemben (stacionárius és ergodikus hozamok) ebben az alfejezetben jóval korlátozóbb feltételezéssel élünk, mégpedig, hogy a hozamok függetlenek és azonos eloszlásúak. A kritikák e feltételek mellett születtek.

Egy tipikus kritika a következő. Tételezzük fel, hogy az egyes eszközök hozama független, azonos eloszlást követ! Jelölje S_n a vagyont az n-edik periódus végén, továbbá legyen a hasznosság a következő módon adott:

$$U(S_n, \gamma) = S_n^\gamma / \gamma,$$

ahol $\gamma \neq 0$. Ahhoz, hogy a várható hasznosságot maximalizáljuk, minden egyes időpontban azonos portfóliót kell választanunk. Jelöljük **c**-vel az $U(\cdot)$ hasznossági függvény várható értékét maximalizáló portfóliót, és legyen **d** a logoptimális portfólió, azaz az a portfólió, amely maximalizálja az $\mathbb{E}\{\log S_n\}$ kifejezést tetszőleges n esetén.

Összehasonlítva a két portfólió teljesítményét az $U(\cdot)$ hasznossági függvény által meghatározott mértékben, adódik, hogy

$$\frac{\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathbf{c}}, \gamma)\}}{\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathbf{d}}, \gamma)\}} \to \infty,$$

ha $n \to \infty$ (*Samuelson* [1963]), ahol $S_n^{\mathbf{c}}$ az n-edik napig elért vagyona a **c** stratégiának.

Ennél valamivel komolyabb ellenérv, de még mindig ugyanazon gondolat ismétlésének tekinthető a *Merton–Samuelson* [1974] szerzőpárostól származó kritika. A szerzők megmutatták, hogy a logoptimális portfólió még közelítően sem lesz optimális a *kezdeti vagyon egyenértékese* értelmében. Jelölje

$$\pi_{\mathbf{ef}}(n, S_0) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\mathbf{ef}}$$

az **f** stratégia kezdeti vagyon egyenértékesét az **e** stratégiához viszonyítva, ha

$$\mathbb{E}\{U(\pi_{\mathbf{ef}} S_n^{\mathbf{e}}, \gamma)\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\{U(S_n^{\mathbf{f}}, \gamma)\},$$

feltéve, hogy $S_0 = 1$. Legyen **e** a logoptimális stratégia! Jelölje **f** az $U(x, \gamma) = x^\gamma / \gamma (\gamma < 1)$ hasznossági függvény esetén a várható hasznosságot maximalizáló stratégiát! A logoptimális stratégia „közelítően" optimális ebben a módosított értelemben, ha $\lim_{n\to\infty} \pi_{\mathbf{ef}}(n, S_0) = 1$ és $\pi_{\mathbf{ef}}$ az idő csökkenő függvénye.

Tekintve az $U(x, \gamma) = x^\gamma / \gamma, (\gamma < 1)$ hasznossági függvényt,

$$\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathbf{f}}, \gamma)\} = \frac{\mathbb{E}\{(S_n^{\mathbf{f}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{(\mathbb{E}\{(S_1^{\mathbf{f}})^\gamma\})^n}{\gamma} \tag{3}$$

adódik. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\{U(\pi_{\mathbf{ef}} S_n^{\mathbf{e}}, \gamma)\} = \frac{\mathbb{E}\{(\pi_{\mathbf{ef}} S_n^{\mathbf{e}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{\pi_{\mathbf{ef}}^\gamma (\mathbb{E}\{(S_1^{\mathbf{e}})^\gamma\})^n}{\gamma}. \tag{4}$$

Vizsgáljuk $\gamma \neq 0$-át, ekkor (3)-ból és (4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\pi_{\mathbf{ef}} = \lambda(\gamma)^{n/\gamma},$$

ahol

$$\lambda(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}\{(S_1^{\mathbf{f}})^\gamma\}}{\mathbb{E}\{(S_1^{\mathbf{e}})^\gamma\}}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{\mathbf{ef}}(n, S_0) = \infty,$$

és

$$\frac{\partial \pi_{\mathbf{ef}}(n, S_0)}{\partial n} > 0.$$

Tehát a logoptimális stratégia nem optimális ebben a módosított értelemben.

Az ilyen jellegű kritikákkal az a probléma, hogy figyelmen kívül hagyják azt a tényt, hogy az $\mathbb{E}\{\log S_n\}$-t nem hasznossági megfontolások miatt kell maximalizáljuk, hanem a kedvező aszimptotikus tulajdonságai miatt. Vegyük észre, hogy az egyes befektetők hasznosságától függetlenül pénzben kifejezve 1 valószínűséggel a legnagyobb vagyont fogja biztosítani aszimptotikusan. Ugyanakkor, ha már a logaritmusfüggvényt hasznossági függvénynek akarjuk tekinteni, akkor ne várjuk, hogy a logoptimális stratégia egy logaritmustól különböző hasznossági függvény szerinti várható hasznosságot is maximalizáljon.

Maga Markowitz is olyan metakritérium megtalálásán fáradozott, ami a várható hasznosság megszállottjait is meggyőzi a logoptimális portfóliók aszimptotikus optimalitásáról. Hitte, hogy a várható hasznosság Neumann és Morgenstern által bevezetett maximalizálása az üdvözítő út az optimális portfólió kiválasztására. *Markowitz* [1976] nem túl szigorú feltételek mellett a logoptimális portfóliók optimalitását is igazolta.

Tételezzük fel, hogy minden időpontban azonosak a befektetési lehetőségek, vagyis a hozamok függetlenek és azonos eloszlásúak.

A hasznossági függvénnyel kapcsolatban Markowitz csak egy kikötést tesz: ha egy **C** stratégiából származó vagyonsorozat $S^{\mathbf{C}} = (S_0, S_1^{\mathbf{C}}, S_2^{\mathbf{C}}, \ldots)$ és egy **D** stratégiából származó vagyonsorozat $S^{\mathbf{D}} = (S_0, S_1^{\mathbf{D}}, S_2^{\mathbf{D}}, \ldots)$ esetén az $S^{\mathbf{C}}$ sorozat minden eleme nagyobb, mint az $S^{\mathbf{D}}$ sorozat minden eleme egy bizonyos N után, akkor $U(S^{\mathbf{C}}) \geq U(S^{\mathbf{D}})$.

E két feltételezés biztosítja a logoptimális portfólióválasztás felsőbbrendűségét, amit Markowitz következőképpen bizonyít.

Jelölje y_i a $\log(1 + r_i)$-t, vagyis a logszázalékos hozamot. Jelölje **C** a logoptimális stratégiát, és legyen **D** egy tetszőleges másik stratégia. A logoptimális stratégia definíciójából adódik, hogy $\mathbb{E}(y_n^{\mathbf{C}}) > \mathbb{E}(y_n^{\mathbf{D}})$, minden n-re. Feltehetjük, hogy az y_1, y_2, … független és azonos eloszlású valószínűségi változók véges μ várható értékkel, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu) = 0\,, \quad 1 \text{ valószínűséggel},$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \mu\,, \quad 1 \text{ valószínűséggel}.$$

Mivel $\mathbb{E}(y_n^{\mathbf{C}}) > \mathbb{E}(y_n^{\mathbf{D}})$, ezért adódik, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\mathbf{C}} \ge \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\mathbf{D}},$$

minden $n \ge N(\omega)$-ra majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. Alkalmazva $y_i = \log(1 + r_i)$-t kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^{\mathbf{C}}) \ge \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^{\mathbf{D}})$$

minden $n \ge N(\omega)$-ra, majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. Így,

$$S_n^{\mathbf{C}} \ge S_n^{\mathbf{D}}$$

minden $n \ge N(\omega)$-ra, majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. Innen a hasznossági függvényre tett feltételezésből adódik, hogy

$$U(S_0, S_1^{\mathbf{C}}, S_2^{\mathbf{C}}, \ldots) \ge U(S_0, S_1^{\mathbf{D}}, S_2^{\mathbf{D}}, \ldots) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

és így

$$\mathbb{E}\{U(S^{\mathbf{C}})\} \ge \mathbb{E}\{U(S^{\mathbf{D}})\}.$$

Univerzálisan konzisztens empirikus befektetési stratégiák

Meglepő tény, hogy létezik univerzális stratégia a stacionárius és ergodikus folyamatok tetszőleges osztálya esetén, amit *Algoet* [1992] bizonyított. Algoet konstrukciója azonban elég komplex, és az elméleti jelentősége ellenére kicsi a gyakorlati értéke. Algoet bevezetett egy egyszerűbb sémát is, és vázlatosan bizonyította univerzális konzisztenciáját, amelynek teljes bizonyítását végül *Györfi–Schäfer* [2003] adta meg.

A következőkben három univerzálisan konzisztens portfólióstratégiát mutatunk be, amelyek alapjait az alakfelismerés és a nem paraméteres regresszióbecslés témakörében jól ismert módszerek adják: a *partíciós becslő*, a *magfüggvény alapú becslő* és a *legközelebbi szomszéd becslő*. Mindhárom stratégia alapötlete, hogy a közeli múlthoz „hasonló mintázatokat” keres a múltban, és ezek alapján készít becslést a másnapi részvényárfolyamokra, amely alapján maximalizálja a portfólióját (a három stratégia közötti különbség éppen a hasonlóság definíciójában van). A stratégiák alapjainak részletesebb leírása megtalálható *Devroye–Györfi–Lugosi* [1996] 9., 10. és 11. fejezetében és *Györfi–Kohler–Krzyzak–Walk* [2002] 4., 5. és 6. fejezetében.

Hisztogram alapú stratégia

Bemutatjuk Algoet sémájának Györfi–Schäfer-féle változatát, az úgynevezett *hisztogram alapú befektetési stratégiát* mint a korábban említett portfólióválasztási stratégiák egy speciális esetét. Jelölje $\mathbf{B}^H$ a hisztogram alapú befektetési stratégiát!

$\mathbf{B}^H$ konstrukciója a következő. Először definiáljuk az elemi stratégiáknak (szakértőknek) egy végtelen osztályát $\mathbf{H}^{(k,\ell)} = \{\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ indexek pozitív egészek, $k, \ell = 1, 2, \ldots$.

Egy $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ szakértő esetén k a mintaillesztési ablakméretét (lásd később), míg ℓ a kvantálás finomságát adja meg. Legyen $\mathbb{R}_+^d$-nek egy partíciója, $\mathcal{P}_\ell = \{A_{\ell,j}\}$, ahol $j = 1, 2, \ldots, m_\ell$, amely m_ℓ darab diszjunkt halmazból (cellából) áll. A $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ szakértő ahhoz, hogy meghatározza a portfólióját az n-edik napon, az utolsó k nap hozamvektorát veszi alapul. Diszkretizálja (kvantálja) $\mathcal{P}_\ell$ partíció szerint a „múlt" $k \times d$ dimenziós vektorát, és meghatározza azt a portfólióvektort, amely optimális azokon a múltbeli napokon, amelyeknek a kvantált k hosszú múltja egybeesik a mostanival. Formálisan, jelölje $\mathcal{G}_\ell$ a $\mathcal{P}_\ell$ partícióhoz tartozó diszkretizáló függvényt, azaz

$$\mathcal{G}_\ell(\mathbf{x}) = j, \quad \mathbf{x} \in A_{\ell,j}.$$

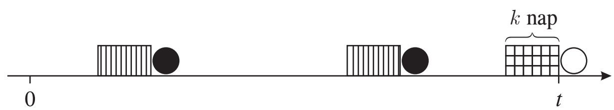
Vezessük be a következő egyszerűsítő jelölést minden n-re és $\mathbf{x}_1^n \in \mathbb{R}^{dn}$-re, jelentse $\mathcal{G}_\ell(\mathbf{x}_1^n)$ a $\mathcal{G}_\ell(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathcal{G}_\ell(\mathbf{x}_n)$ sorozatot! Ezután definiáljuk a $\mathbf{H}^{(k,\ell)} = \{\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$ szakértőt

$$\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \prod_{\{k<i<n:\mathcal{G}_\ell(x_{i-k}^{i-1})=\mathcal{G}_\ell(x_{n-k}^{n-1})\}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle, \tag{5}$$

minden $n > k + 1$-re, ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\mathbf{b}_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót. Tehát $\mathbf{h}_n^{(k,\ell)}$ diszkretizálja $\mathbf{x}_1^{n-1}$ szekvenciát a $\mathcal{P}_\ell$ partíció szerint, és megkeresi az összes egyezést a múltban az utoljára látott $\mathcal{G}_\ell(\mathbf{x}_{1-k}^{n-1})$ k hosszú kvantált sorozattal. Ezután kiválasztja azt a fix portfólióvektort, amely maximalizálja a kifizetést a kvantált sorozatok után következő napokon.

Az *1. ábra* összefoglalja a stratégia csúszó ablakos működését. A vonalkázott téglalapok a múltbeli k hosszú mintaegyezéseket jelentik. A teli karikák a múltbeli mintaegyezéseket követő napi hozamok, aminek alapján az üres karikára, azaz a holnapi hozamra ad becslést a stratégia.

1. ábra
A csúszó ablak szemléltetése



A $\mathbf{B}^H$ hisztogram alapú stratégiát a $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ szakértők kombinálásával kapjuk, felhasználva egy $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűségi eloszlást, amely minden pozitív egész pár (k, ℓ) halmazán értelmezett úgy, hogy $k, \ell, q_{k,\ell} > 0$. $\mathbf{B}^H$ stratégia a $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ szakértők egyszerű súlyozása a múltbeli teljesítményük alapján a következőképpen: a befektető vagyona az n-edik nap után

$$S_n(\mathbf{B}^H) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}), \tag{6}$$

ahol $S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)})$ az n-edik nap után összegyűlt vagyont jelenti, amikor $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ portfólióstratégiát használja, és a kezdeti tőke $S_0 = 1$. Az S_0 kezdeti tőkét $\mathbf{H}^{(k,\ell)}$ szakértők között a $q_{k,\ell}$ valószínűségi eloszlás szerint osztjuk szét, azaz $S_0(\mathbf{H}^{(k,\ell)}) = q_{k,\ell} S_0$. *Györfi–Schäfer* [2003] megmutatta, hogy $\mathbf{B}^H$ stratégia univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak minden olyan osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty \quad j = 1, 2, \ldots, d$ esetén, és a kvantáláshoz használt partíciók teljesítik a következő két tulajdonságot:

a) a partíciók sorozata finomodó, azaz $\mathcal{P}_{\ell+1}$ minden cellája egy részhalmaza $\mathcal{P}_\ell$ partíció megfelelő cellájának, $\ell = 1, 2, \ldots$ és

b) ha $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ jelöli a halmaz átmérőjét, akkor minden origó középpontú gömb $S \subset \mathbb{R}^d$ esetén

$$\lim_{\ell \to \infty} \max_{A_{\ell,j} \cap S \neq 0} \operatorname{diam}(A_{\ell,j}) = 0.$$

Szakértők kombinálása

Az előbb bemutatott empirikus stratégia alapötlete a szakértők (portfóliók) kombinálása, azaz

$$S_n(\mathbf{B}) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}),$$

és az univerzális konzisztenciához azt kell megmutatni, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\mathbf{B}) \geq W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

A bizonyítás két lépésből áll. Először azt kell belátni, hogy a kombináltportfólió- és a portfólióstratégia-osztályban lévő legjobb portfólió között szoros kapcsolat van. Második lépés annak a megmutatása, hogy a portfólióstratégia-osztályban a legjobb portfólió univerzálisan konzisztens. Az első lépés gondolatmenete a következő

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\mathbf{B}) &= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sup_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sup_{k,\ell} (\log q_{k,\ell} + \log S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)})) \\
&\geq \sup_{k,\ell} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}),
\end{aligned}$$

ezért az előzőkben taglalt stratégiák esetén azt kell megmutatni, hogy

$$\sup_{k,\ell} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\mathbf{H}^{(k,\ell)}) > W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Magfüggvény alapú stratégia

Györfi–Lugosi–Udina [2006] vezette be a magfüggvény alapú stratégiát, amelynek egy egyszerűbb, az egyenletes magfüggvényhez tartozó, úgynevezett mozgó ablakos változatát ismertetjük.

Ugyanúgy, mint az előző alfejezetben, a stratégiához definiáljuk a szakértők egy végtelen osztályát $\mathbf{H}^{(k,\ell)} = \{\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ pozitív egészek. Minden fix k, ℓ pozitív egészhez válasszunk egy sugarat, amire igaz $r_{k,\ell} > 0$ úgy, hogy minden fix k-ra

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0.$$

Ekkor minden $n > k+1$ esetén definiáljuk $\mathbf{h}^{(k,\ell)}$ szakértőt a következőképpen:

$$\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \prod_{\{k<i<n:\, \|x_{i-k}^{i-1} - x_{n-k}^{n-1}\| \le r_{k,\ell}\}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle,$$

ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\mathbf{b}_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót. Az algoritmus azokat a mintákat tekinti hasonlónak, amelyeknek az euklédeszi távolsága kisebb egy meghatározott $r_{k,\ell}$ sugárnál.

A szakértőket a hisztogram alapú stratégia esetén bemutatott módon kombináljuk a (6) szerint.

Györfi–Lugosi–Udina [2006] bebizonyította, hogy $\mathbf{B}^K$ portfóliósóséma univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatok azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$.

Legközelebbi szomszéd alapú stratégia

A korábbiakhoz hasonlóan definiáljuk a szakértők egy végtelen osztályát $\mathbf{H}^{(k,\ell)} = \{\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol $0 < k$, ℓ, egészek. Jelölje k a mintaillesztési ablak hosszát, és minden ℓ-hez válasszuk $q_\ell \in (0,1)$-t úgy, hogy

$$\lim_{\ell\to\infty} q_\ell = 0. \tag{7}$$

Legyen

$$\hat{\ell} = \lfloor q_\ell n \rfloor.$$

Minden adott napon a szakértő megkeresi $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszédot a múltban. $k, \ell (n > k + \hat{\ell} + 1)$ fix pozitív egészekre vezessük be az $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszéd (LSZ) halmazát:

$$\hat{J}_n^{(k,\ell)} = \{i: k+1 \le i \le n \text{ úgy, hogy } x_{i-k}^{i-1} \text{ benne van } x_{n-k}^{n-1}\ \hat{\ell} \text{ LSZ-ja között}\}.$$

Legyen $\mathbf{h}^{(k,\ell)}$ szakértő definíciója

$$\mathbf{h}^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \prod_{\{i\in\hat{J}_n^{(k,\ell)}\}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle.$$

Azaz $\mathbf{h}_n^{(k,\ell)}$ szakértő egy fix portfólióvektor, amely a legközelebbi szomszédok előfordulását követő napokra nézve optimális.

A szakértők kombinálása ugyanúgy történik, mint korábbi két stratégia esetén [lásd (6)].

Györfi–Udina–Walk [2006]-ben bebizonyította, hogy a $\mathbf{B}^{NN}$ portfóliósóséma univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$.

Kísérletek a New York-i Értéktőzsde adatain

A bemutatott univerzálisan konzisztens portfólióstratégiákat a New York-i Értéktőzsde (NYSE) standard adatsorán vizsgálták, amelyet többek között *Cover* [1991], *Singer* [1997], *Helmbold–Schapire–Singer–Warmuth* [1998], *Blum–Kalai* [1999], *Borodin–El-Yaniv–Gogan* [2000] is használt empirikus vizsgálataihoz. Az adatsor 36 részvény napi árait tartalmazza egy 22 év hosszú perióduson (5651 kereskedési napon) keresztül 1962-től 1984-ig.

Vizsgálatok során a következő feltételezésekkel élnek, amelyeket az ismert közgazdasági modellek is alkalmaznak (lásd például *Markowitz* [1952] és *Sharpe* [1964]):

– a részvények korlátlanul oszthatók,

– a részvényekből korlátlan mennyiség áll a rendelkezésünkre az aktuális (napi) áron, azaz tetszőlegesen kevés vagy sok részvényt tudunk venni vagy eladni,

– nincs tranzakciós költség és

– a befektető infinitezimális, azaz a befektető akciói nincsenek hatással a piac viselkedésére (ez a feltevés, akkor realisztikus, ha a befektetett vagyon kicsi a piac kereskedési volumenéhez képest).

A szimulációk során (*Györfi–Lugosi–Udina* [2006], *Györfi–Udina–Walk* [2006]) elért látványos vagyonnövekedést (például több mint 10^{12}-enes növekedési faktor 22 év alatt a New York-i Értéktőzsdén) körültekintően kell értelmezni, mivel a gyors növekedés a valós piacokon elkerülhetetlenül maga után vonna számos reakciót, amelyet sem az elméleti, sem a gyakorlati modellek nem képesek leírni. Az egyszerűsítések ellenére úgy gondoljuk, hogy a numerikus eredmények erős empirikus bizonyítékot nyújtanak arra,

1. táblázat

Különböző befektetési stratégiákkal elért vagyon a *Cover* [1991] által használt NYSE-részvénypárokon

Részvények					Legjobb sz. $[k, \ell]$
Iroquois–Kin Ark	Legjobb részvény	8,92	$\mathbf{B}^H$	2,3e+10	1,39e+11 [1, 1]
	BCRP	73,70	$\mathbf{B}^K$	4,03e+10	9,01e+11 [2, 2]
	Orákulum	6,85e+53	$\mathbf{B}^{NN}$	1,15e+12	1,44e+13 [2, 8]
	Cover UP	39,97			
	Singer AKP	143,7			
Com. Met–Mei. Corp	Legjobb részvény	52,02	$\mathbf{B}^H$	162,5	327,8 [2, 1]
	BCRP	103,0	$\mathbf{B}^K$	775,1	4749 [2, 5]
	Orákulum	2,12e+35	$\mathbf{B}^{NN}$	3505	3,14e+4 [3, 6]
	Cover UP	74,08			
	Singer AKP	107,7			
Com. Met–Kin Ark	Legjobb részvény	52,02	$\mathbf{B}^H$	1,33e+10	8,54e+10 [1, 1]
	BCRP	144,0	$\mathbf{B}^K$	1,11e+11	1,41e+12 [3, 3]
	Orákulum	1,84e+49	$\mathbf{B}^{NN}$	4,78e+12	8,25e+13 [3, 7]
	Cover UP	80,54			
	Singer AKP	206,7			
IBM–Coca-Cola	Legjobb részvény	13,36	$\mathbf{B}^H$	63,8	112,2 [1, 5]
	BCRP	15,02	$\mathbf{B}^K$	47,6	194,6 [1, 6]
	Orákulum	1,08e+15	$\mathbf{B}^{NN}$	74,3	296,3 [1, 7]
	Cover UP	14,24			
	Singer AKP	15,05			

UP: univerzális portfólió, AKP: Singer-féle adaptív kapcsolgatós portfólió.

hogy a részvénypiac nem hatékony. Ezt részben azzal magyarázhatjuk, hogy annak ellenére, hogy a javasolt modell csak publikus adatokat használt, az általa feltárt piaci összefüggések elég komplexek ahhoz, hogy a legtöbb kereskedő számára rejtve maradjanak.

A következőkben négy részvénypáron végzett szimulációk eredményét mutatjuk be (*Györfi–Lugosi–Udina* [2006], *Györfi–Udina–Walk* [2006]). Az eredményeket az *1. táblázat* foglalja össze. A gyakorlatban minden szimuláció esetén a szakértők végtelen nagy osztálya helyett csak egy véges 50 szakértőből álló osztályt használtak. A szakértők paraméterei $k = 1, \ldots, K$ és $\ell = 1, \ldots, L$, ahol $K = 5$ és $L = 10$.

A táblázat második oszlopában található a két részvény közül a jobbik által elért vagyon, a legjobb konstans újrasúlyozott portfólióval, egy orákulummal (ez a legjobb lehetséges stratégia, amely minden napon a jobb, magasabb hozamú, részvénybe fekteti a vagyont), illetve Cover-féle univerzális portfólióval (UP) és a Singer-féle adaptív kapcsolgatós portfólióval (AKP) elért vagyonnövekedés. A harmadik oszlop tartalmazza a korábban bemutatott három univerzálisan konzisztens stratégiával: a hisztogram ($\mathbf{B}^H$), a magfüggvény ($\mathbf{B}^K$) és a legközelebbi szomszéd ($\mathbf{B}^{NN}$) alapú befektetési stratégiákkal elért vagyont. Az összes esetben $K = 5$ és $L = 10$. Az utolsó oszlopban a $K \times L$ darab szakértő közül a legjobb szakértő vagyonát és a hozzá tartozó paraméterek indexeit soroltuk fel.

A logoptimális és Markowitz-féle portfólióelmélet kapcsolata

Ebben a fejezetben párhuzamot vonunk a logoptimális befektetés és a Markowitz-féle portfólióválasztás között. Első pillanatra ez több okból is meglepő lehet.

A Markowitz-féle portfólióválasztás a várható érték és a variancia kettősére vonatkozó preferenciák alapján rangsorolja a portfóliókat. A várható hasznosság oldaláról ez a következőképpen magyarázható. Tekintsünk egy CARA típusú (konstans abszolút kockázatkerülő) hasznossági függvényt. Legyen ez az $U(x) = -e^{-kx}$ függvény, ahol $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = k$ az abszolút kockázatkerülés mértéke. Ismert, hogy ha $x \sim N(\mu, \sigma)$, akkor a $\mathbb{E}U$ helyett a $V(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2} k\sigma^2$ kifejezést vizsgálhatjuk.

Ha a logoptimális portfólióválasztást a logaritmikus hasznosság maximalizálásaként fogjuk fel, akkor ez nem más mint egy $U(x, \gamma) = \frac{1}{\gamma}(x^\gamma - 1)$ CRRA (konstans relatív kockázatkerülő) hasznossági függvény $\gamma \to 0$ helyen vett várható értékének a maximalizálása [ha $\gamma \to 0$, akkor $U(x, \gamma) \to \log(x)$]. Következésképpen egy konstans abszolút kockázatkerülő függvényt vetünk össze egy nem konstans abszolút kockázatkerülővel.

A következő érveink vannak arra, hogy mégis indokolt az összehasonlítás.

A két portfólióválasztási szabály azonos logikáját igazolja a logoptimális portfólióválasztás később definiálandó implicit kockázatkerülő tulajdonsága is. Másrészt, később megmutatjuk, hogy kvadratikus közelítést alkalmazva, a logoptimális portfólióválasztásra egy, a várható értéktől pozitívan és a varianciától negatívan függő kifejezést kapunk, hasonlóan a markowitzi portfólióválasztáshoz.

Markowitz [1952] a modern portfólióelméletet megalapozó cikkében rámutatott arra, hogy a várható hozam maximalizálása hosszú távon nem hozhat eredményt a piacon, mivel figyelmen kívül hagyja a diverzifikáció elvét (ekkor az összes vagyon egyetlen részvénybe invesztálódik). Javaslata az volt, hogy a részvényekben rejlő kockázatot is figyelembe kell venni a várható hozam mellett. A kockázat jellemzésére a hozamok varianciáját használta. Értelemszerűen az azonos várható hozamú értékpapírok között a racionális befektető a kisebb szórásút, míg azonos variancia mellett a nagyobb várható értékűt részesíti előnyben.

A logoptimális portfólió hasonló tulajdonságát vizsgálta *Vajda* [2006]. Vezessük be az implicit kockázatkerülés fogalmát. Egy **g** portfólióstratégiára azt mondjuk, hogy c szinten implicit kockázatkerülő, hogy ha két $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ portfólió közül, amelyekre teljesül, hogy

$$\mathbb{E}\langle \mathbf{b}_1, X\rangle = \mathbb{E}\langle \mathbf{b}_2, X\rangle,$$

és

$$\mathrm{Var}\langle \mathbf{b}_1, X\rangle = \mathrm{Var}\langle \mathbf{b}_2, X\rangle + c,$$

ahol $c \geq 0$, akkor

$$\mathbf{g}(\mathbf{b}_1, X) \leq \mathbf{g}(\mathbf{b}_2, X).$$

Ekkor belátható, hogy a logoptimális portfólió implicit kockázatkerülő

$$c = 2\max_i \mathbb{E}\{\,|\,X^{(i)} - 1\,|^3\}$$

paraméterrel, ahol $X^{(i)}$ a hozamvektor i-edik komponense, és $X^{(i)}$ nagyobb, mint 0,6.

Az eredeti cikkben (*Markowitz* [1952]) – mivel független és azonos eloszlású adatsorokon végzett vizsgálatokat kézenfekvő volt a várható hozam vizsgálata – könnyen látható, hogy ha függések vannak egyes hozamok között, akkor ehelyett megfelelőbb a *feltételes* várható hozam vizsgálata. Vegyük észre, hogy függetlenség esetén a feltételes várható hozam egybeesik a várható hozammal. Egy **b** portfólió Markowitz-féle hasznosság függvénye a következő kvadratikus alakban írható fel

$$\mathbb{E}\left\{U_{E-V}\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle\right) \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} = E_{\mathbf{b}} - \lambda V_{\mathbf{b}},$$

ahol

$$E_{\mathbf{b}} = \mathbb{E}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}$$

és

$$V_{\mathbf{b}} = \mathbf{Var}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}$$

és λ a befektető kockázatkerülési hajlandóságát fejezi ki. Mivel a kockázatkerülés az adott befektetőt jellemzi, ezért **b** nem függ a választott portfóliótól. Ezért a fenti egyenletet maximalizáló portfólióra igaz, hogy

$$b^*_{E-V} = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} E_{\mathbf{b}} - \lambda V_{\mathbf{b}} = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \frac{E_{\mathbf{b}}}{\lambda} - V_{\mathbf{b}}. \tag{8}$$

A loghasznosság és $E - V$ megközelítés közötti kapcsolatot vizsgálta *Markowitz* [1959], *Markowitz* [1976] és *Yong–Trent* [1969]. Megmutatták bizonyos hozamvektor-eloszlásokra, hogy

$$\mathbb{E}\log\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle\right) \approx \log\mathbb{E}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle\right\} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{Var}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle\right\}}{\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i\right\rangle\right)^2\right\}}\right).$$

A kövekezőkben egy általános összefüggést mutatunk a loghasznosság és az $E - V$ megközelítés között, ehhez *Györfi–Urbán–Vajda* [2006]-ban bevezetett *semilog* függvényt használjuk, amelynek során a hozamvektorról nem kell semmilyen korlátozó feltételezést tennünk. A semilog függvény a log(z) függvény másodrendű Taylor-sorfejtése a $z = 1$ körül, azaz:

$$\log(z) \approx z - 1 - \frac{1}{2}(z-1)^2.$$

A fenti közelítést használva a loghasznosságra, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i \right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} \approx \mathbb{E}\left\{\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i \right\rangle - 1 \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i \right\rangle - 1\right)^2 \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\}.$$

A semilog függvény egy jó közelítés log(z)-re, mivel z tipikusan 1 körüli értéket vesz fel. Jelölje a feltételes második momentumot $E_{\mathbf{b}}^2$, azaz

$$E_{\mathbf{b}}^2 = \mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i \right\rangle\right)^2 \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\},$$

ekkor levezethető, hogy

$$\begin{aligned}
\arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{i-1}), \mathbf{X}_i \right\rangle \mid \mathbf{X}_1^{i-1}\right\} &\approx \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)}\left(2E_{\mathbf{b}} - \frac{1}{2}E_{\mathbf{b}}^2 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)}\left(2E_{\mathbf{b}} - \frac{1}{2}(E_{\mathbf{b}}^2 - (E_{\mathbf{b}})^2) - \frac{1}{2}(E_{\mathbf{b}})^2\right) \\
&= \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)}\left(E_{\mathbf{b}}\left(2 - \frac{1}{2}E_{\mathbf{b}}\right) - \frac{1}{2}V_{\mathbf{b}}\right) \\
&= \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)}(E_{\mathbf{b}}(4 - E_{\mathbf{b}}) - V_{\mathbf{b}}) \\
&= \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)}\left(\frac{E_{\mathbf{b}}}{\lambda_{\mathbf{b}}V_{\mathbf{b}}} - V_{\mathbf{b}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} b_{s-\log}^*,
\end{aligned}$$

ahol $\lambda_{\mathbf{b}} = \dfrac{1}{4 - E_{\mathbf{b}}}$ a várható hozamtól függő kockázatkerülési hajlandóságot fejezi ki. Ez az alak megegyezik a Markowitz-modellből levezetett, (8)-ban lévő alakkal, azzal az eltéréssel, hogy a kockázatkerülési hajlandóság, $\lambda_{\mathbf{b}}$, függ a **b** portfóliótól. Mivel $E_{\mathbf{b}}$ értéke 1 körüli, tipikusan korlátos intervallumba van (napi hozam a tőzsdei szabályozás miatt nem haladhat meg egy szintet), ezért a semilog hasznosság megfeleltethető az $E - V$ hasznosságnak $\lambda \approx \dfrac{1}{3}$ választással.

*

A cikkben pénzügyi piacokon alkalmazható szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutattunk be. Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek, az ismertetett modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel, hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus folyamatot alkotnak. Bemutattuk az univerzális konzisztencia fogalmát, és áttekintettük a hisztogram, a magfüggvény és a legközelebbi szomszéd alapú univerzálisan konzisztens stratégiákat, valamint a hozzájuk kapcsolódó empirikus eredményeket. Ezeknek a módszereknek a fő üzenete, hogy léteznek nem paraméteres befektetési stratégiák, amelyek hatékonyan feltárják a múltbeli adatokban lévő rejtett összefüggéseket, és ezeket kiaknázva képesek gyors vagyonnövekedést elérni. Végül, párhuzamot vontunk a Markowitz-féle és logoptimális portfólióelmélet között az implicit kockázatkerülés fogalmán és a hasznosságfüggvény kvadratikus sorfejtésén keresztül.

Hivatkozások

ALGOET, P. [1992]: Universal schemes for prediction, gambling, and portfolio selection. Annals of Probability, 20. 901–941. o.

ALGOET, P.–COVER, T. [1988]: Asymptotic optimality asymptotic equipartition properties of log-optimum investments. Annals of Probability, 16. 876–898. o.

BARRON, A.–COVER, T. [1988]: A bound on the financial value of information. IEEE Transactions on Information Theory 34. 1097–1100. o.

BLUM, A.–KALAI, A. [1999]: Universal portfolios with and without transaction costs. Machine Learning, 35. 193–205. o.

BORODIN, A.–EL-YANIV, R.–GOGAN, V. [2000]: On the competitive theory and practice of portfolio selection (kibővítettt összefoglaló). Proceedings of the 4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'00), Punta del Este, Uruguay, 173–196. o.

BREIMAN, L. [1961]: Optimal gambling systems for favorable games. Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 65–78. o.

CESA-BIANCHI, N.–LUGOSI, G. [2000]: Minimax values and entropy bounds for portfolio selection problems. Proceedings of the First World Congress of the Game Theory Society, Bilbao, Spanyolország, július, 24–28.

COVER, T. U. [1991]: Universal portfolios. Mathematical Finance, Vol. 1. 1–29. o.

COVER, T.–ORDENTLICH, E. [1996]: Universal portfolios with side information. IEEE Transactions on Information Theory 42. 348–363. o.

CROSS, J.–BARRON, A. [2003]: Efficient universal portfolios for pastdependent target classes. Mathematical Finance, 13. 245–276. o.

DEVROYE, L., GYÖRFI, L.–LUGOSI, G. [1996]: A Probabilistic Theory of Pattern Recognition. Springer-Verlag, New York.

FINKELSTEIN, M.–WHITLEY, R. [1981]: Optimal strategies for repeated games. Advances in Applied Probability, 13. 415–428.

GYÖRFI, L.–KOHLER, M.–KRZYZAK, A.–WALK, H. [2002]: A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression. Springer, New York.

GYÖRFI, L.–LUGOSI, G.–UDINA, F. [2006]: Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. Mathematical Finance, 16. 337–357. o.

GYÖRFI, L.–SCHÄFER, D. [2003]: Nonparametric prediction. Megjelent: *Suykens J. A. K.–Horváth, G.–Basu, S.–Micchelli, C.–Vandevalle, J.* (szerk.): Advances in learning theory: Methods, models and applications. IOS Press, NATO Science Series, 339–354. o.

GYÖRFI, L.–UDINA, F.–WALK, H. [2006]: Nonparametric nearest-neighbor-based empirical portfolio selection strategies. Kézirat közlésre benyújtva.

GYÖRFI, L.–URBÁN, A.–VAJDA, I. [2006]: Kernel-based semi-logoptimal empirical portfolio selection strategies. Kézirat közlésre benyújtva.

HELMBOLD, D. P.–SCHAPIRE, R. E.–SINGER, Y.–WARMUTH, M. K. [1998]: On-line portfolio selection using multiplicative updates. Mathematical Finance, 8. 325–344. o.

KELLY, J. [1956]: A new interpretation of information rate. Bell System Technical Journal, 35. 917–926. o.

LATANÉ, H. [1959]: Criteria for choice among risky ventures. Journal of Political Economy, 38. o. 145–155. o.

MARKOWITZ, H. [1952]: Portfolio selection. Journal of Finance, Vol. 7. No. 1. 77–91. o.

MARKOWITZ, H. [1959]: Portfolio Selection: Efficient Diversification in Investments. JohnWiley, NewYork.

MARKOWITZ, H. [1976]: Investment for the long run: New evidence for an old rule. Journal of Finance, Vol. 31. No. 5. 1273–1286. o.

MEDVEGYEV PÉTER [2002]: Valószínűségszámítás. Aula, Budapest.

MERTON, C. R.–SAMUELSON, P. A. [1974]: Fallacy of the lognormal approximation to optimal decision making over many periods. Journal of Financial Economics, 67–94. o.

MÓRI TAMÁS [1982]: Asymptotic properties of empiricial strategy in favourable stochastic games. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 36. Limit Theorems in Probability and Statistics, 777–790. o.

MÓRI TAMÁS [1986]: Is the empirical strategy optimal? Statistics and Decisons, 4. 45–60. o.

MÓRI TAMÁS–SZÉKELY G. J. [1982]: How to win if you can? Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 36. Limit Theorems in Probability and Statistics, 791–806. o.

MORVAI, G. [1991]: Empirical logoptimal portfolio selection. Problems of Control and Information Theory, Vol. 20. No. 6. 453–463. o.

MORVAI, G. [1992]: Portfolio choice based on the empirical distribution. Kybernetika, Vol. 28. No. 6. 484–493. o.

ORDENTLICH, E.–COVER, T. [1998]: The cost of achieving the best portfolio in hindsight. Mathematics of Operations Research, 23. 960–982. o.

SAMUELSON, P. [1963]: A. Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers. Scientia, 57. április–május.

SHARPE, W. F. [1964]: Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 19. 425–442. o.

SINGER, Y. [1997]: Switching portfolios. International Journal of Neural Systems. 8. május, 445–455. o.

STOLTZ, G.–LUGOSI, G. [2003]: Internal regret in on-line portfolio selection. Proceedings of the 16th Annual Conference on Learning Theory, COLT 2003, tavasz, 403–417. o.

VAJDA ISTVÁN [2006]: Risk control in logoptimum investment. Kézirat.

VOVK, V.–WARMUTH, K. [1998]: Universal portfolio selection. Proceedings of the 11th Annual conference on Computational Learning Theory, 12–23. o.

WALK, H.–YAKOWITZ, S. [2002]: Iterative nonparametric estimation of a logoptimal portfolio selection function. IEEE Transactions on Information Theory, 48. 324–333. o.

YONG, W. E.–TRENT, R. M. [1969]: Geometric mean approximation of individual security and portfolio performance. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 4. No. 2. 179–200. o.