Közgazdasági Szemle, LI. évf., 2004. február (127–138. o.)

BADICS JUDIT–GÖMÖRI ANDRÁS

Információ és tudás

Azokban a modellekben, amelyekben döntéshozók viselkedése révén írnak le gazdasági helyzeteket, jelenségeket, a modell megoldása, eredménye szempontjából fontos, hogy a döntéshozók mit tudnak a helyzetrõl, egymásról, egymás tudásáról, egymás tudására vonatkozó tudásáról stb. E tudás, információ leírására alkalmas fogalmi apparátus leegyszerûsítõ feltevésein az alkalmazások túlléptek. Ezért a tanulmányban e fogalomrendszer általánosítására teszünk javaslatot.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C72, D82.

A bizonytalanság melletti döntés speciális esete az a szituáció, amelyben a döntéshozó ismeri egy változó vagy paraméter valószínûségeloszlását, de mielõtt döntését meghozná, további információhoz jut, és ennek birtokában dönt. Az ilyen döntési helyzet szokásos eleme az aszimmetrikus információs játékoknak. E játékok szolgálnak alapjául azoknak a modelleknek, amelyeket széles körben használnak a modern közgazdaságtan számos területén, például a tender- és aukcióelméletben, az ösztönzés- és szerzõdéselméletben vagy a vállalatok stratégiai viselkedésének elméletében *(industrial organization)*.[1]

Kissé elhanyagoltnak tûnik ugyanakkor az a kérdés, hogy hogyan írjuk le az említett döntési szituációban a döntéshozó információs helyzetét. Az ezt leíró eszköztárat[2] erõsen leegyszerûsítõ feltevések mellett építették ki, az alkalmazások pedig – úgy tûnik – túlléptek e feltevéseken. Ezért a következõkben kísérletet teszünk az eszköztár általánosítására. Elõször röviden ismertetjük az információ hagyományos leírását, majd a javasolt általánosítást, végül néhány példával illusztráljuk javaslatunk lényegét.

Az információ és a tudás hagyományos leírása

A kiinduló helyzetben semmit sem teszünk fel a döntéshozó információiról, csupán azt, hogy a számára releváns, elvileg vagy logikailag elképzelhetõ állapotok mindegyikét lehetségesnek tartja. Legyen ezeknek az állapotoknak a halmaza: Ω. Azt, hogy a kiinduló helyzethez képest a döntéshozó további információhoz jutott, úgy írhatjuk le, hogy az Ω egy részhalmazának elemeit meg tudja különböztetni az Ω más elemeitõl, azaz tudja, hogy e részhalmaz valamely eleme fennáll, de nem tudja, hogy melyik. Ezt szokás úgy

[1] Az utóbbi évek hazai publikációiból lásd például *Szatmári* [1996], *Esõ* [1997], *Esõ–Simonovits* [2003].

[2] Az eszköztár rövid leírását lásd például *Osborne–Rubinstein* [1994] 67–85. o., magyar nyelven *Gömöri* [2001], 10–19. o.

Badics Judit egyetemi tanársegéd, Veszprémi Egyetem, közgazdaságtan tanszék.
Gömöri András egyetemi docens, BKÁE, matematikai közgazdaságtan és gazdaságelemzés tanszék.

fogalmazni, hogy tett valamilyen megfigyelést, vagy megfigyelt egy jelzést. Azt kell tehát leírnunk, hogy a vizsgált személy milyen szabályok szerint jut információkhoz – tesz megfigyeléseket –, és ebbõl hogyan von le következtetéseket.

A jelzõfüggvény, információs halmaz, információs struktúra

Legyen Y a jelzések megszámlálható halmaza. Feltesszük, hogy az Ω állapothalmaz részhalmazainak $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ halmazán adott egy σ-algebra, amelynek elemei az események, és hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, azaz bármely jelzésre $\mathcal{A}$-mérhetõ azon állapotok halmaza, melyben az adott jelzés megfigyelhetõ.

1. definíció. *A jelzõfüggvény a $\varphi : \Omega \to Y$ függvény, melyre Y megszámlálható halmaz, és*

$$\forall y \in Y \qquad \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) = y\} \in \mathcal{A}.$$

A döntéshozó tehát az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli a $\varphi(\omega)$ jelzést, majd jelzõfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhetõ. Ezeknek az állapotoknak a halmaza a megfigyelt jelzéshez tartozó *információs halmaz*.

2. definíció. *$I \in P(\Omega)$ a döntéshozó információs halmaza, ha van olyan $y \in Y$, hogy*

$$I = \varphi^{-1}(y).$$

Ha minden jelzéshez hozzárendeljük a hozzá tartozó információs halmazt, megkapjuk a döntéshozó információs halmazrendszerét, amelyet szokás a döntéshozó információs struktúrájának is nevezni.

3. definíció. *A döntéshozó információs struktúrája az*

$$\mathcal{I} = \{\varphi^{-1}(y) \in P(\Omega) \mid y \in Y\}$$

halmazrendszer.

Abból, hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, az következik, hogy az $\mathcal{I}$ halmazrendszer minden eleme az Ω állapothalmaz egy $\mathcal{A}$-mérhetõ részhalmaza.

Minthogy a jelzõfüggvény minden állapothoz egyértelmûen meghatároz egy jelzést, ezért az információs struktúra az Ω állapothalmaz egy partíciója. Szokás azt is mondani, hogy az információs struktúra particionális.

Pontosan jellemezzük a döntéshozó információs helyzetét, ha megadjuk, hogy milyen állapot fennállása esetén mit tud. Ezt megadhatjuk jelzõfüggvényével, az információs struktúrával, vagy az

$$I : \Omega \to \mathcal{I} \qquad \omega \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(\omega))$$

függvénnyel, amelyet információs függvénynek nevezünk.

Tudás, tudásfüggvény, köztudott tudás

Kíváncsiak lehetünk arra is, hogy ha adott esemény bekövetkezik, vajon a döntéshozó tudja-e ezt. A kérdésre válaszolni tudunk, ha ismerjük jelzõfüggvényét vagy információs struktúráját. Ha a döntéshozó az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli az $y = \varphi(\omega)$ jelzést, akkor tudja, hogy a $\varphi^{-1}(y)$ esemény bekövetkezett. Ha $E \in \mathcal{A}$ tetszõleges esemény, a döntéshozó az $y \in Y$ jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy E bekövetkezett, ha $\varphi^{-1}(y) \subseteq E$.

Megadhatjuk ugyanezt az információs struktúra segítségével is.

4. definíció. *Az* $\omega \in \Omega$ *állapotban a döntéshozó tudja, hogy az* $E \in \mathcal{A}$ *esemény bekövetkezett, ha* $I(\omega) \subseteq E$.

Ekkor röviden azt mondjuk, a döntéshozó tudja, hogy E.

Feltehetjük továbbá azt a kérdést is, hogy melyek azok az állapotok, amelyek fennállása esetén egy adott E eseményre vonatkozóan a döntéshozó tudja, hogy E? Minthogy az információs struktúra ismeretében bármely ω állapotra vonatkozóan meg tudjuk mondani, hogy az adott állapot fennállása esetén a döntéshozó tudja-e, hogy E, ezért rendeljük az E eseményhez az állapotok $\{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}$ halmazát, azaz az összes olyan állapotot, amelyben a döntéshozó tudja, hogy E. De ezt megtehetjük minden $E \in \mathcal{A}$ esemény kapcsán!

5. definíció. *A tudásfüggvény a*

$$K : \mathcal{A} \to \mathrm{P}(\Omega) \qquad E \mapsto \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}$$

hozzárendelés.

A tudásfüggvény tehát minden E eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, amelyek fennállása esetén a döntéshozó tudja, hogy E.

Fontosak és ismertek a tudásfüggvény egyes tulajdonságai, ezek tárgyalását itt mellõzzük.[3]

Ha egy szituációnak több döntéshozó a szereplõje, akkor elõfordulhat, hogy valamennyiük döntése függ attól, hogy a többiek hogyan döntenek. Vagyis a döntések közötti kapcsolat stratégiai interakció, azaz a szituáció játék. Ekkor nemcsak az fontos, hogy mit tudnak a döntéshozók, hanem az is, hogy egymás tudásáról mit tudnak. Vagyis döntéshozatali viselkedésük nemcsak az információs struktúrájuktól, hanem az azok közötti viszonytól is függ.

Azt mondjuk, hogy az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között *köztudott tudás*, ha

i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy l tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

Tehát valamely E esemény köztudott tudás az ω állapotban, ha az ω-ban megfigyelhetõ jelzésekbõl álló $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ profilra teljesül, hogy ha bármely $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor

i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy l tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

6. definíció. *Az* $E \in \mathcal{A}$ *esemény az* $\omega \in \Omega$ *állapotban köztudott tudás az* $1, 2, \ldots, n$ *döntéshozók között, ha bármely* $k \in \mathbb{N}^+$ *pozitív egész szám és* i: $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *függvény esetén*

$$\omega \in K_{i(1)}\,(K_{i(2)} \ldots (K_{i(k)}(E)) \ldots).$$

A köztudott tudás fenti fogalma nyilvánvalóan a tudásfüggvény fogalmára épül.[4]

Azok a feltevések, amelyekre az információ és a tudás hagyományos leírása épül természetesek és kézenfekvõk. E feltevések ugyanis lehetõvé teszik, hogy amikor a döntés-

[3] Errõl lásd például *Osborne–Rubinstein* [1994] 69–70. o.

[4] Nem a tudásfüggvényre, hanem a partíciók durvítására és a metszetfüggvényre épül a köztudott tudás – az itt megadottnál talán szellemesebb – elsõ, Aumanntól származó definíciója (*Aumann* [1976]). A kettõ ekvivalenciájának bizonyítását adja *Bacharach* [1985]. Egy harmadik, az elõzõkkel ekvivalens köztudott tudás fogalmat ad meg *Milgrom* [1981].

hozó következtetéseket von le információiból, gondolkodása ellentmondásmentes legyen, eleget tegyen bizonyos minimális konzisztenciakövetelményeknek.

Ha ugyanis a fennálló állapot egyértelmûen meghatározza a megfigyelhetõ jelzést, akkor minden ω esetén $\omega \in I(\omega)$. Ez azt jelenti, hogy a döntéshozó információja ugyan nem teljes, de sohasem félrevezetõ abban az értelemben, hogy egy valóban fennálló állapotról sohasem gondolja, hogy lehetetlen. Továbbá e feltevések mellett, azaz particionális információs struktúra esetén, ha egy ω_1 állapot fennállásakor a döntéshozó az állapotok egy $I(\omega_1)$ halmazát tartja lehetségesnek, akkor egy másik ω_2 állapotra nézve két eset lehetséges. Ha $\omega_2 \in I(\omega_1)$, akkor az ω_2 állapot fennállása esetén a döntéshozó ugyanazokat az állapotokat tartja lehetségesnek, mint ω_1 esetén, azaz $I(\omega_1) = I(\omega_2)$ Ha viszont $\omega_2 \notin I(\omega_1)$, akkor a két halmaz diszjunkt. Ha ugyanis $I(\omega_1) \neq I(\omega_2)$, és létezne egy $\omega_3 \in I(\omega_1) \cap I(\omega_2)$ állapot, akkor errõl az ω_3 állapotról a döntéshozónak akár az ω_1, akár az ω_2 állapot fennállása esetén egyidejûleg kellene azt gondolnia, hogy lehetséges, és hogy nem lehetséges.

Ugyanakkor az említett feltevések megszorító jellegûek és fölöslegesek. Könnyû rámutatni, hogy van olyan – nem is túlságosan különleges vagy ritka – helyzet, amelyben e feltevések nem teljesülnek. Illusztrálja itt ezt egy példa!

Két játékos, A és B egy szekvenciális, aszimmetrikus információs játékot játszik. Elõször A – a jól informált játékos – választ egy akciót, ezt B – a rosszul informált játékos – megfigyeli, majd B választ egy akciót, és a játéknak vége. Tegyük fel, hogy A kétféle típusú lehet – a, illetve b – valamint hogy A akciója is kétféle lehet, ezek: L és P.

Tegyük fel, hogy a játék valamely egyensúlyában az A játékos, amennyiben típusa a, akkor az L akciót választja, és amennyiben típusa b, keveri az L és a P akciót. Ez meghatározza a B játékos információit az egyensúlyban. Számára két állapot lehetséges. Az egyik az, hogy A típusa a, a másik, hogy A típusa b. Ugyanakkor tesz egy megfigyelést, amely számára a fennálló állapotról információt hordoz. E megfigyelés nem más, mint A egy akciója. A leírt egyensúlyban B információi – A viselkedése nyomán – a különbözõ állapotokhoz a következõképpen rendelnek megfigyeléseket:

$$a \mapsto \{L\} \qquad b \mapsto \{L, P\}.$$

Így információs halmazrendszere az egyensúlyban

$$\mathcal{I} = \{\{a, b\}, \{b\}\}$$

nem partíció.

Minthogy ez a helyzet minden olyan szekvenciális, aszimmetrikus információs játék részben szeparáló egyensúlyában, amelyben a jól informált fél dönt elõször (szignáljáték), ezért nem indokolt kizárni, hogy egy döntéshozó egy állapotban több jelzést is megfigyelhessen. Erre épül az általunk javasolt fogalomrendszer.

Az információ és a tudás általánosabb fogalmai

A következõkben tehát az információ általánosabb kezelését lehetõvé tevõ eszköztárat mutatunk be, amelyhez egy egyszerû feltevés feloldásával jutunk. Ismét úgy tekintjük, hogy a döntéshozó valamely megfigyelés realizálása elõtt az Ω állapothalmaz minden elemérõl elképzelhetõnek tartja, hogy bekövetkezett. *Most azonban nem tesszük fel, hogy minden állapot egyértelmûen meghatározza a döntéshozó által megfigyelt jelzést*, hanem csak azt követeljük meg, hogy minden egyes állapothoz kijelölhetõ legyen az összes jelzések Y halmazának egy olyan részhalmaza, amelynek egyik elemét az adott állapot bekövetkezése esetén a döntéshozó megfigyeli. A megfigyelt jelzés információt hordoz a döntéshozó számára, ha feltesszük, hogy ismeri *jelzõfüggvényét*, amely bármely állapothoz a megfigyelhetõ jelzések halmazát rendeli.[5]

A továbbiakban is feltesszük, hogy adott egy $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ σ-algebra, amelynek elemei az események, és hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, azaz bármely jelzésre $\mathcal{A}$-mérhetõ azon állapotok halmaza, melyben az adott jelzés megfigyelhetõ.

Jelzõfüggvény, információs halmaz, információs struktúra

Elõször megadjuk a szükséges fogalmakat a fenti feltételek mellett.

7. definíció. *A jelzõfüggvény a*

$$\varphi : \Omega \to P(Y)$$

függvény, melyre teljesül, hogy

$$\forall y \in Y\text{-ra } \{\omega \in \Omega \mid y \in \varphi(\omega)\} \in \mathcal{A}.$$

Az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor a döntéshozó megfigyeli $\varphi(\omega)$ egy elemét. A $\varphi(\omega)$ halmaz elemeit az ω állapotban *megfigyelhetõ jelzéseknek* mondhatjuk.

A döntéshozó tehát megfigyeli jelzését, majd jelzõfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhetõ. Ezen állapotok halmaza a megfigyelt jelzéshez tartozó *információs halmaz*, az összes információs halmazból álló halmazrendszer pedig a döntéshozó *információs struktúrája*. A megfigyelt jelzés alapján az állapotra ilyen módon történõ következtetést írja le a φ^- függvény, amely a következõ

$$\varphi^- : Y \to P(\Omega) \qquad y \mapsto \{\omega \in \Omega \mid y \in \varphi(\omega)\}.$$

8. definíció. $\mathcal{I} \in P(\Omega)$ *információs halmaz, ha van olyan* $y \in Y$*, hogy*

$$I = \varphi^-(y).$$

9. definíció. *A döntéshozó információs struktúrája a*

$$\mathcal{I} = \{\varphi^-(y) \mid y \in Y\}$$

halmazrendszer.

Hasonlóan a hagyományos tudás leírásához, itt is abból, hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, az következik, hogy az $\mathcal{I}$ halmazrendszer minden eleme az Ω állapothalmaz egy $\mathcal{A}$-mérhetõ részhalmaza.

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}$ nem feltétlenül partíció Ω-n. Az információs struktúra pontosan akkor partíció az állapothalmazon, ha a jelzõfüggvény által a különbözõ állapotokhoz rendelt eloszlások tartói páronként diszjunkt vagy megegyezõ halmazok.

[5] A jelzõfüggvény értelmezhetõ olyan függvényként is, amely az állapotokhoz a jelzések halmazán értelmezett $(Y, \mathcal{Y}, \varphi(\omega))$ Kolmogorov-féle valószínûségi mezõt rendel a következõ módon. A jelzõfüggvény által valamely ω állapothoz rendelt $\varphi(\omega)$ valószínûségi mérték szerint a jelzések egy halmazának valószínûsége megegyezik annak valószínûségével, hogy a döntéshozó az adott ω állapotban olyan jelzést figyel meg, amely a jelzések említett halmazának eleme. Ekkor a $\varphi(\omega)$ valószínûségi mérték tartója az ω állapotban megfigyelhetõ jelzések halmazának lezártja.

A feltételes és a feltétlen tudás

Ha a döntéshozó az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli az $y \in \varphi(\omega)$ jelzést, akkor tudja, hogy a $\varphi^{-}(y)$ esemény bekövetkezett.

Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszõleges esemény! Az, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az E esemény bekövetkezett, attól függ, hogy milyen jelzést figyel meg. A döntéshozó az $y \in Y$ jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy E bekövetkezett, ha $\varphi^{-}(y) \subseteq E$.

Általában csak a döntéshozó által megfigyelt jelzés birtokában lehet megmondani, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az adott esemény bekövetkezett. Bizonyos információs struktúrák esetén a megfigyelt jelzés pontos ismerete nélkül is tudunk valamit a döntéshozó tudásáról állítani. Ha csupán azt tudjuk, hogy mely állapot valósult meg – illetve az adott állapotban a döntéshozó számára megfigyelhetõ jelzések halmazát ismerjük –, el tudjuk dönteni, hogy vajon elõfordulhat-e, hogy a döntéshozó tudja: az E esemény bekövetkezett. Ha lehetséges, hogy a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett, akkor az ω állapotban megfigyelhetõ jelzések között található olyan $y \in \varphi(\omega)$, amelyre $\varphi^{-}(y) \subseteq E$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a döntéshozó *feltételesen tudja*, hogy az E esemény bekövetkezett.

10. definíció. Az *$\omega \in \Omega$ állapotban a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az $E \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett, ha létezik $y \in \varphi(\omega)$, melyre $\varphi^{-}(y) \subseteq E$.*

Más információs struktúrák esetén még ennél is többet mondhatunk. Elõfordulhat ugyanis, hogy bármely, az adott állapotban megfigyelhetõ jelzésének megfigyelése után a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett, azaz bármely $y \in \varphi(\omega)$ esetén $\varphi^{-}(y) \subseteq E$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az ω állapotban az E eseményt a döntéshozó *feltétel nélkül tudja*, vagy *feltétlenül tudja*, vagy egyszerûen ω-ban az E esemény a döntéshozó *feltétlen tudása*.

11. definíció. *Az $\omega \in \Omega$ állapotban a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az $E \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett, ha*

$$\bigcup_{y \in \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E.$$

A feltételes és a feltétlen tudás definíciójának egyenes következménye, hogy ha egy esemény az adott állapotban feltétlen tudás, akkor feltételes tudás is.

A feltételes- és a feltétlentudás-függvény

A tudásfüggvényt a hagyományos tudásfüggvény mintájára, a tudás fogalmára építve konstruáljuk meg. Csakhogy a hagyományos leírással ellentétben, most kétféle tudásfogalommal dolgozunk, így kétféle tudásfüggvény-fogalmat kell megadnunk.

A feltételestudás-függvény minden $E \in \mathcal{A}$ eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. A feltételes tudás definícióját felhasználva, ez azt jelenti, hogy a feltételestudás-függvény az $E \in \mathcal{A}$ eseményhez az

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \varphi(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq E\}$$

halmazt rendeli.

12. definíció. *A feltételestudás-függvény a*

$$K^{c} : \mathcal{A} \to P(\Omega) \qquad E \mapsto \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \varphi(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq E\}$$

hozzárendelés.

Ehhez hasonlóan a feltétlentudás-függvény minden $E \in \mathcal{A}$ eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, amelyekben a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. Most a feltétlen tudás definícióját felhasználva, ez azt jelenti, hogy a feltétlentudás-függvény az $E \in \mathcal{A}$ eseményhez az

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E\right\}$$

halmazt rendeli.

13. definíció. *A feltétlentudás-függvény a*

$$K^u : \mathcal{A} \to P(\Omega) \qquad E \mapsto \left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E\right\}$$

hozzárendelés.

Belátható, hogy bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^c(E)$, illetve $K^u(E)$ is esemény, tehát a K^c, illetve a K^u függvény értékei az $\mathcal{A}$ σ-algebrából valók.[6]

Végül kimondunk egy, a feltételestudás-függvény és feltétlentudás-függvény viszonyára vonatkozó állítást.

1. állítás. *Bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E) \subseteq K^c(E)$.*

Az állítás ugyancsak a feltételes és feltétlen tudás definíciójából közvetlenül következik. A feltételestudás-függvény és a feltétlentudás-függvény fontos tulajdonságai is megadhatók, és ezek nem azonosak a hagyományos tudásfüggvény ismert tulajdonságaival. Részletes tárgyalásukra itt nem térünk ki,[7] de a feltételestudás-függvény egy tulajdonságát megemlítjük, mert szükségünk lesz rá.

2. állítás. Bármely $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén $K^c(A) \subseteq A$.

Bizonyítás. Gondoljuk meg, hogy egyrészt

$$\omega \in K^c(A). \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in \varphi(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq A.$$

Másrészt

$$y \in \varphi(\omega) \quad \Rightarrow \quad \omega \in \varphi^{-}(y).$$

így ha $\omega \in K^c(A)$, akkor $\omega \in \mathcal{A}$ is teljesül. ■

A feltételes és a feltétlen köztudott tudás

Minthogy leírásunk a megkettõzött tudásfogalomra épül, a tudásfüggvényhez hasonlóan itt is a köztudott tudás kétféle fogalmát kell megadnunk.

Azt mondjuk, hogy az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény az 1, 2, …, n döntéshozók között *feltételes köztudott tudás*, ha

i feltételesen tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltételesen tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltételesen tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

Tehát valamely E esemény feltételes köztudott tudás az ω állapotban, ha van olyan ω-

[6] A bizonyítást lásd *Badics* [2003].

[7] Errõl részletesen lásd *Badics* [2003].

ban megfigyelhetõ jelzésekbõl álló $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ profil, hogy ha bármely $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor

i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

14. definíció. Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban feltételes köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K^c_{i(1)}(K^u_{i(2)} \ldots (K^u_{i(k)}(E))\ldots).$$

A feltétlen köztudott tudás ennél többet követel meg.

Az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozó között *feltétlen köztudott tudás*, ha

i feltétlenül tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltétlenül tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltétlenül tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

Azaz bármely, az ω-ban megfigyelhetõ jelzésekbõl álló $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ profil esetén, ha minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor

i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re stb.

15. definíció. Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban feltétlen köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K^u_{i(1)}(K^u_{i(2)} \ldots (K^u_{i(k)}(E))\ldots).$$

Természetes, hogy mivel a feltétlen tudásnak következménye a feltételes tudás, azért abból, hogy egy E esemény feltétlen köztudott tudás, az következik, hogy E feltételes köztudott tudás is.

Most azonban megfogalmazunk egy talán kevésbé kézenfekvõ állítást is.

3. állítás. Bármely $E \in \mathcal{A}$ esemény és $\omega \in \Omega$ állapot esetén az E esemény akkor és csakis akkor feltétlen köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, ha E feltételes köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között.

Vagyis a két köztudott tudás fogalom ekvivalens.

Bizonyítás. Mivel bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E) \subseteq K^c(E)$ *(1. állítás)*, azért minden $\omega \in \Omega$, $E \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}^+$ és $i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

$$\omega \in K^u_{i(1)}(K^u_{i(2)} \ldots (K^u_{i(k)}(E))\ldots) \quad \Rightarrow \quad \omega \in K^c_{i(1)}(K^u_{i(2)} \ldots (K^u_{i(k)}(E))\ldots).$$

Ebbõl az következik, hogy ha az E esemény az ω állapotban feltétlen köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, akkor E az ω állapotban feltételes köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között.

A fordított irány belátásához legyen $\omega \in \Omega$, $E \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}^+$ és $i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tetszõleges, a továbbiakban rögzített. Tegyük fel, hogy az E esemény ω-ban feltételes köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között. Ekkor a feltételes köztudott tudás definíciója (11. definíció) szerint teljesül, hogy

$$\omega \in K^c_1(K^u_{i(1)}(K^u_{i(2)} \ldots (K^u_{i(k)}(E))\ldots)). \tag{1}$$

A feltételestudás-függvény megmutatott tulajdonságából *(2. állítás)*

$$K_1^c(K_{i(1)}^u(K_{i(2)}^u\ldots(K_{i(k)}^u(E))\ldots))\subseteq K_{i(1)}^u(K_{i(2)}^u\ldots(K_{i(k)}^u(E))\ldots)$$

következik, így

$$\omega\in K_{i(1)}^u(K_{i(2)}^u\ldots(K_{i(k)}^u(E))\ldots)$$

is igaz. Mivel ez utóbbi reláció bármely $k\in\mathbb{N}^+$ és $i:\{1, 2, \ldots, k\}\to\{1, 2, \ldots, n\}$ esetén következik (1)-bõl, azért ha ω-ban E feltételes köztudott tudás az 1, 2, …, n döntéshozók között, akkor ω-ban E feltétlen köztudott tudás az 1, 2, …, n döntéshozók között. ■

Néhány illusztráció

Az információs struktúra és a tudásfogalom általánosítása

Az eddigiekbõl talán úgy tûnhet, hogy az információs struktúra particionális vagy nem particionális jellege a döntõ kérdés. Ezért – egy példa segítségével – szeretnénk rámutatni, hogy nem az az igazán fontos, hogy egy döntéshozó információs struktúrája particionális, vagy nem, hanem az, hogy a feltételestudás- és a feltétlentudás-fogalmak a hagyományos tudásfogalom általánosításai. Ezt két lépésben mutatjuk meg. Elõször a példában szereplõ nem particionális információs struktúrához – az állapothalmaz újradefiniálásával – megadunk egy particionális információs struktúrát, amely ugyanazt az információs helyzetet írja le. Ezután rámutatunk a tudás, a feltételes tudás és a feltétlen tudás fogalmai közötti különbségre az újradefiniált állapothalmaz, illetve particionális információs struktúra mellett.

Legyen az állapothalmaz: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a jelzések halmaza: $Y = \{a, b, c, d\}$, valamint a φ jelzõfüggvény a következõ:

$$\varphi(1) = \{a\},\quad \varphi(2) = \{a, b\},\quad \varphi(3) = \{b, c\},\ \varphi(4) = \{d\},\ \varphi(5) = \{d\}.$$

Ekkor

$$\varphi^-(a) = \{1, 2\},\quad \varphi^-(b) = \{2, 3\},\quad \varphi^-(c) = \{3\},\ \varphi^-(d) = \{4, 5\},$$

az információs struktúra:

$$\mathcal{I} = \{\{1, 2\}, \{2,3\}, \{3\}, \{4, 5\}\}.$$

Ez nem partíció.

Ugyanennek a döntéshozónak az információs helyzete particionális információs struktúrával is leírható. Ehhez vegyük az Ω állapothalmaz és a jelzések Y halmazának az $\Omega\times Y$ Descartes-szorzatát.[8] E Descartes-szorzat valamely $(\omega, y)\in\Omega\times Y$ eleme azt jelöli, hogy az Ω elemei közül ω valósult meg, és a döntéshozó az y jelzést figyeli meg. Legyen $\overline{\Omega}\subseteq\Omega\times Y$ azon állapotjelzéspárok halmaza, amelyek pozitív valószínûséggel megvalósulhatnak! A továbbiakban nevezzük az így kapott

$$\overline{\Omega} = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b), (3, c), (4, d), (5, d)\}$$

halmazt módosított állapothalmaznak. A módosított állapothalmazon a döntéshozó információs struktúrája:

$$\bar{\mathcal{I}} = \{\{(1, a), (2, a)\}, \{(2, b), (3, b)\}, \{(3, c)\}, \{(4, d), (5, d)\}\}.$$

[8] A módszert *Aumann–Brandenburger* [1995] cikke javasolja. Ekkor bármely döntéshozó információs struktúrája minden helyzetben partíció.

Ez partíció.

Legyen az E esemény a következõ: $E = \{2, 3, 4\}$! Az E eseménynek az újradefiniált állapothalmazon az

$$\overline{E} = \{(2, a), (2, b), (3, b), (3, c), (4, d)\}$$

esemény felel meg. Vizsgáljuk meg, hogy mit tud a döntéshozó az E, illetve $\overline{E}$ eseményrõl az egyes állapotokban!

A $(2, a)$ újradefiniált állapot az $\{(1, a), (2, a)\}$ információs halmazban van és $\{(1, a), (2, a)\} \not\subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(2, a)$-ban nem tudja, hogy $\overline{E}$. A $(2, b)$ újradefiniált állapotban a döntéshozó információs halmaza $\{(2, b), (3, b)\}$, melyre $\{(2, b), (3, b)\} \subseteq \overline{E}$, ezért a döntéshozó $(2, b)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 2 eleme valósul meg, akkor az, hogy a döntéshozó mit tud az E eseményrõl, attól függ, hogy milyen jelzést figyel meg. Mivel 2-ben van olyan megfigyelhetõ jelzés, amely esetén a döntéshozó tudja, hogy E, azért a döntéshozó 2-ben feltételesen tudja, hogy E. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{2} = \{(2, a), (2, b)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor van olyan újradefiniált állapot, amely esetén a döntéshozó tudja, hogy $\overline{E}$.

A $(3, b)$ újradefiniált állapot a $\{(2, b), (3, b)\}$ információs halmazban van és $\{(2, b), (3, b)\} \subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(3, b)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. A $(3, c)$ újradefiniált állapotban a döntéshozó információs halmaza $\{(3, c)\}$, melyre $\{(3, c)\} \subseteq \overline{E}$, ezért a döntéshozó $(3, c)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 3 eleme valósul meg, akkor a döntéshozó bármely megfigyelhetõ jelzés esetén tudja, hogy E. Így a döntéshozó 3-ban feltétlenül tudja, hogy E. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{3} = \{(3, b), (3, c)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor a döntéshozó bármely állapotban tudja, hogy $\overline{E}$.

A $(4, d)$ újradefiniált állapot a $\{(4, d), (5, d)\}$ információs halmazban van és $\{(4, d), (5, d)\} \not\subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(4, d)$-ben nem tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 4 eleme valósul meg, akkor a döntéshozó egyetlen megfigyelhetõ jelzés esetén sem tudja, hogy E. Így a döntéshozó 4-ben még feltételesen sem tudja, hogy E. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{4} = \{(4, d)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor a döntéshozó egyetlen állapotban sem tudja, hogy $\overline{E}$.

A köztudott tudás fogalmának általánosítása

Jól elboldogulunk egy kétszemélyes szimultán játék 2×2-es kifizetési mátrixával, ha megoldást keresünk, azonban tudjuk, hogy még a legegyszerûbb játék sem oldható meg azon feltevés nélkül, hogy a játék megadásában foglalt legalább néhány információ a játékosok között köztudott tudás.[9] Nem beszélve arról, hogy az aszimmetrikus információs játékok pontosan azzal jellemezhetõk, hogy megmondjuk, mely információ köztudott tudás a játékosok között, és mi magáninformáció. Miközben tehát a köztudott tudás fogalma meglehetõsen fontos, a hagyományos, Aumann által bevezetett fogalom csak a hagyományos feltevések, azaz particionális információs struktúrák esetén érvényes. Ennek ellenére elõfordul egyes közgazdasági alkalmazásokban, hogy olyan esetekben használják, amikor a döntéshozók információs struktúrája nem partíció. Állításunk illusztrálására – a szempontunkból lényegtelen részletek mellõzésével – felidézünk egy példát.

Egy a valutaválságról szóló cikkben (*Morris–Shin* [1998])[10] a szerzõk egy egyszerû

[9] *Aumann–Brandenburger* [1995] cikkükben rámutatnak, hogy e feltevést mikor, milyen mértékben lehet feloldani.

[10] A cikkre Vincze János hívta fel a figyelmünket más összefüggésben.

játékot tárgyalnak. A játék szereplõi: egyfelõl a központi jegybank, amely vagy védi a valutát, vagy nem, másfelõl a lehetséges spekulálók, akik vagy támadják a valutát, vagy nem. A szerzõk megmutatják, hogy amennyiben a játék teljes információs, két tiszta egyensúlya van: az egyikben a központi jegybank védi a valutát, a spekulálók pedig nem támadják, a másikban a központi jegybank nem védi a valutát, a spekulálók pedig támadják. Így a modellnek semmilyen elõrejelzõ ereje sincs abban a tekintetben, hogy lesz-e válság, vagy nem. Ha azonban – mint azt a szerzõk megmutatják – a játékot nem teljes információssá tesszük (a spekulálóknak a fundamentumok értékére vonatkozó ismereteit tekintve), az egyensúly egyértelmûvé válik. Az eredmény mögött az húzódik meg, hogy ebben az esetben a fundamentumoknak nincs olyan értéke, amely mellett a fundamentumok egy intervalluma (egy esemény) a spekulálók között köztudott tudás. Ez az a mozzanat, amely – eltekintve itt a cikk fõ mondanivalójától – szempontunkból érdekes, ezért érdemes erre részletesebben kitérni.

A szerzõk a spekulálók hiányos informáltságát a következõképpen írják le. Legyen a fundamentumok értéke θ valamennyi spekuláló számára egyenletes eloszlású valószínûségi változó a [0, 1] intervallumon. Amennyiben a fundamentumok valódi értéke θ, minden spekuláló megfigyel egy x jelzést úgy, hogy x egyenletes eloszlású valószínûségi változó a $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ intervallumon,[11] ahol ε valamely kicsiny pozitív szám, és az egyes spekulálók által megfigyelt jelzések egymástól függetlenek. Ezek után a szerzõk megmutatják, hogy ilyen feltételek mellett a fundamentumoknak nincs olyan értéke, amely mellett a fundamentumok egy – a [0, 1]-tõl különbözõ – intervalluma a spekulálók között köztudott tudás. Ismét eltekintve a számunkra lényegtelen részletektõl, a gondolatmenet azon alapul, hogy egy esemény a szereplõk között akkor köztudott tudás, ha n-ed rendû tudás bármely n-re. A szerzõk azt mutatják meg, hogy ez nem teljesül. A gondolatmenet tehát a tudás és köztudott tudás hagyományos fogalmával operál, amelyek az eredeti feltevések mellett és így particionális információs struktúra esetén értelmezhetõk.

Könnyû azonban belátni, hogy ha spekulálók információit a fenti módon adjuk meg, akkor információs halmazrendszerük nem partíció. Ha egy spekuláló az x jelzést figyeli meg, akkor információs halmaza az $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ intervallum. Csakhogy minden állapotban végtelen sok jelzést figyelhet meg, a különbözõ állapotokhoz tartozó információs halmazai pedig nem feltétlenül diszjunktak vagy azonosak. Információs halmazrendszere tehát nem partíció. A szóban forgó tanulmány tehát olyan esetre használja a hagyományos tudás, illetve köztudott tudás fogalmát, amelyre azok nem érvényesek, ráadásul egy olyan helyzetben, amelyben az eredmény magyarázata szempontjából e fogalmaknak kulcsszerepük van.

A köztudott tudás általunk javasolt fogalma azonban itt is használható. Ugyanakkor fontos, hogy a tudásfogalom általánosítása során fogalmi rendszerünk mintegy kettéágazott, kétféle tudásfogalmat kellett megkülönböztetnünk. A köztudott tudás erre épülõ fogalma azonban egységes. E fogalom a köztudott tudás eredeti fogalmának olyan általánosítása, amely speciális esetként tartalmazza a hagyományos fogalmat is.

Hivatkozások

AUMANN, R. J. [1976]: Agreeing to Disagree. The Annals of Statistics, Vol. 4. No. 6. 1236–1239. o.
AUMANN, R.–BRANDENBURGER, A. [1995]: Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. Econometrica, Vol. 63. No. 5. 1161–1180. o.

[11] A példa itt nem pontosan illeszkedik az általunk felvázolt struktúrához, amelyben a jelzések halmaza megszámlálható, itt pedig egy valós intervallum.

BADICS JUDIT [2003]: Információ és egyensúly. PhD-értekezés. BKÁE, Budapest.
BACHARACH, M. [1985]: Some Extensions of a Claim of Aumann in an Axiomatic Model of Knowledge. Journal of Economic Theory, 37. 167–190. o.
ESÕ PÉTER [1997]: Árverés és verseny a közbeszerzésben. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz. 597–611. o.
ESÕ PÉTER–SIMONOVITS ANDRÁS [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre. Közgazdasági Szemle, 2. sz. 99–111. o.
GÖMÖRI ANDRÁS [2001]: Információ és interakció. Bevezetés az információs aszimmetria közgazdasági elméletébe. Typotex Kiadó, Budapest.
MILGROM, P. [1981]: An Axiomatic Characterization of Common Knowledge. Econometrica, Vol. 49. 219–222. o.
MORRIS, S.–SHIN, H. S. [1998]: Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks. American Economic Review, 88. 587–597. o.
OSBORNE M. J.–RUBINSTEIN, A. [1994]: A Course in Game Theory. MIT Press, Cambridge MA.
SZATMÁRI ALEXANDRA [1996]: Aukciók, avagy a képbe kerül, ha a Louvre a képbe kerül? Közgazdasági Szemle, 3. sz. 303–314. o.