Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. október (855–880. o.)

CSÓKA PÉTER

Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció

Bármennyire szeretne is egy bank (vállalat, biztosító) csak az üzletre koncentrálni, nem térhet ki a pénzügyi (hitel-, piaci, operációs, egyéb) kockázatok elől, amelyeket mérnie és fedeznie kell. A teljes fedezés vagy nagyon költséges, vagy nem is lehetséges, így a csőd elkerülésre minden gazdálkodó egységnek tartania kell valamennyi kockázatmentes, likvid tőkét. *Koherens kockázatmérésre* van szükség: az allokált tőkének tükröznie kell a kockázatokat – azonban még akkor is felmerül elosztási probléma, ha jól tudjuk mérni azokat. A diverzifikációs hatásoknak köszönhetően egy portfólió teljes kockázata általában kisebb, mint a portfóliót alkotó alportfóliók kockázatának összege. A *koherens tőkeallokáció* során azzal a kérdéssel kell foglalkoznunk, hogy mennyi tőkét osszunk az alportfóliókra, vagyis hogyan osszuk el „korrekt" módon a diverzifikáció előnyeit. Így megkapjuk az eszközök kockázathoz való hozzájárulását.

A tanulmányban játékelmélet alkalmazásával, összetett opciós példákon keresztül bemutatjuk a kockázatok következetes mérését és felosztását, felhívjuk a figyelmet a következetlenségek veszélyeire, valamint megvizsgáljuk, hogy a gyakorlatban alkalmazott kockázatmérési módszerek [különösen a kockáztatott érték (VaR)] mennyire felelnek meg az elmélet által szabott követelményeknek.*
Journal of Economics Literature (JEL) kód: C71, G21.

A dolgozatban *kockázaton* egy véletlen változó valamilyen jövőbeli időpontra vonatkozó ismert (így különböztetve meg a bizonytalanságtól) eloszlásfüggvényének funkcionálját (például szórás, VaR, CVaR stb.) értjük.[1]

A definíció némi magyarázatra szorul. Kockázati szempontból csak a jövőbeli értékek eloszlása mérvadó, a múltra „fátylat boríthatunk". Gyakran nincs szükség a teljes eloszlás ismeretére: elég azt eldönteni, hogy vállaljuk-e, esetleg vállalhatjuk-e a kockázatot, vagy sem. Ez egy bináris (vagy-vagy) kérdés, így a kockázatot egyetlen számmal is mérhetjük, amellyel jól jellemezzük a pozíció veszteségeloszlását. Ha ez a szám meghalad egy kritikus értéket, akkor nagy a kockázat; ha kisebb attól, akkor túlbiztosítottuk magunkat; ha egyenlő, akkor egyfajta kockázati optimumban vagyunk.

A kockázat méréséből implicit módon következik a kockázatkerülés: azért mérjük a

* Köszönöm *Balogh Endre, Csóka Zsanett, Csorbák Alinka, Király Júlia, Petrovszki Péter, Skorván Róbert* és *Solymosi Tamás* segítségét.

[1] Az *Artzner–Delbaen–Eber–Heath* [1999] cikkből indulunk ki. A matematikusok a koherens kockázatmérés precíz kidolgozása mellett azt is elérték, hogy az opciós letéti szabályok is következetesebbek legyenek.

Csóka Péter a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem PhD-hallgatója (peter.csoka@bkae.hu).

kockázatot, hogy keretek között tarthassuk. A kockázatkerülést két okból is feltehetjük: vagy a konkrét gazdasági szereplő nem kedveli a kockázatot, vagy – jellemzőbb módon – egy „felügyelő” megtiltja neki a túlzott kockázatvállalást.

Felügyelőn a következő szereplőket értjük.

Tőzsdei elszámolóházak. A biztonságosabb, folyamatos tőzsdei kereskedés érdekében az elszámolóházak beékelődnek az ügyfelek közé. Minden ügylet másik oldalán az elszámolóház áll, ezért letéti követelményeket írnak elő a kereskedőknek.[2]

Nemzeti, nemzetközi szabályozók. A bankok, biztosítók, nagyvállalatok stabilitása fontos nemzetgazdasági szempont, csődhullámuk hatalmas veszteségeket okozna. Ugyanakkor a nemzetállamok általában vállalják – a „végső mentsvár” *(lender of last resort)* biztosítójaként – bizonyos nagyságig a betétek, biztosítási díjak, vállalati adósságok visszafizetését, így jogosnak tűnik ezen intézmények kockázatának mérséklése.

Nemzetközi szinten az aktuáriusok és a számviteli szakemberek két szervezeten, a Nemzetközi Aktuárius Szövetségen *(International Actuarial Association, IAA)* és a Nemzetközi Számviteli Szabványok Bizottságán *(International Accounting Standards Board, IASB)* keresztül együttműködve határozzák meg a biztosítótársaságok tőkekövetelményeit. Hasonlóan a Bázeli Bizottság *(The Basel Committee)* a bankszektor tőkekövetelményeit írja elő.

Befektetési menedzser. Egy portfólió menedzsere érdekelt kereskedőinek a regulázásában. Nagy veszteségek esetén a legrosszabb, ami történhet a portfóliókezelőkkel az az, hogy elbocsátják őket. Így a befektetési menedzsernek féken kell tartania buzgó (kockáztató), prémiumra törekvő ügynökeit.

A befektetési menedzser és a végső menedéket nyújtó állami intézmény mint megbízó ügyvivői cselekedeteiről információs hiánnyal *(hidden action)* küzd, ezért a szabályozás már csak a morális kockázat csökkentése miatt is indokolt. A szabályok meghatározhatnak egy kockázatszintet, amelynél nagyobbat nem engednek. Ez a szint a szabályozottak számára kockázati felső korlátként (limitként) szolgálhat.

Koherens kockázatmérés

A különféle gazdasági helyzetek (portfóliók) kockázatát a *veszteségük*[3] jövőbeli eloszlásából határozzuk meg, az ezeket számszerűsítő valószínűségi változókat X, Y stb. betűkkel jelöljük.

Legyen $\rho(X)$: $X \to R$ egy kockázati mérték!

A $\rho(X)$ értelmezése:

– ha pozitív, akkor $\rho(X)$ az a minimális pótlólagos kockázatmentes, likvid tőke (pénz), amelyet hozzá kell tennie a szabályozott félnek a pozíciójához (és prudensen befektetni);

– ha negatív, akkor $-\rho(X)$ nagyságú pénzmennyiség lehívható a pozícióból, vagy kárpótlásként megkapható;

– ha nulla, akkor a szabályozott félnek éppen a $\rho(X)$ a kívánatos mérték, ilyenkor pontosan a megtűrt kockázat van a pozícióban.

[2] Úgynevezett modellmentes *(model-free),* standard módon számíttatja a letéti követelményt az Egyesült Államokban az ellenőrzése alá tartozó tőzsdéken a *Securities and Exchange Comission* (SEC, értékpapír- és tőzsdefelügyelet). Modellfüggő a Londonban és Chicagóban alkalmazott SPAN-módszer *(standard portfolio analysis of risk).* A későbbiekben mindkét módszert részletesen ismertetjük.

[3] A nyereségből is kiindulhatnánk, a képletek értelemszerűen átalakíthatók. A veszteségben talán egyszerűbb gondolkodni. A negatív veszteség nyereség (a másik megközelítésben a negatív nyereség veszteség).

Koherens kockázati mérték[4]

Azt mondjuk, hogy $\rho(X)$ *koherens* kockázati mérték, ha *minden* X-re és Y-ra teljesíti a következő négy axiómát.

– *Szubadditivitás:*

$$\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y).$$

– *Monotonitás:*

$$\text{ha } X \ge Y \text{ („majdnem mindenütt”), akkor } \rho(X) \ge \rho(Y).$$

– *Elsőfokú homogenitás:*

$$\text{minden } \lambda \ge 0 \text{ valós számra } \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X).$$

– *Sallangmentesség (translation invariance):*

$$\text{minden } \alpha \text{ konstansra igaz, hogy } \rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha.$$

Ezek teljesen természetes követelmények egy kockázatot kifejező mérőszámmal szemben.

Az első, *szubadditivitás*t megkövetelő axióma szerint az összeolvadás nem okoz extraveszteségeket: ha egyesítünk két portfóliót, akkor van kockázatdiverzifikációs hatás. *Teljesülése* esetén, ha egy bankcsoporttól kevesebb tőkét követelünk meg, mint a csoport tagjaitól összesen, akkor is biztosak lehetünk abban, hogy sikerül a kockázatot kordában tartanunk. Egy befektetési menedzser – akinek két kereskedője van $\rho(X)$ és $\rho(Y)$ kockázattal – bízhat abban, hogy $\rho(X) + \rho(Y)$ effektív felső korlátja portfóliókezelői egyesített kockázatának, $\rho(X + Y)$-nak. Ha L nagyságú kockázatmentes, likvid tőke (pénz) áll rendelkezésére, akkor L_x és L_y kockázati limitek ($L_x + L_y = L$) engedélyezésével a teljes $(X + Y)$ portfólió kockázati mérőszáma L alatt marad.

Ha nem teljesül a szubadditivitás, akkor a limitek felállítása semmilyen felső korlátot sem nyújt a teljes pozíció kockázatosságára. Lehet, hogy a teljes kockázat a limitek összegének többszöröse. Az ilyen értelemben rossz mérőszám a szabályozottakat sajátos cselekedetekre ösztönzi:

– ilyenkor a tőzsdéző több számlát nyithat, így csökkentve letéti követelményét;

– a vállalatok, bankok, biztosítók leányvállalatokat, független fiókokat hoznak létre, így kisebbnek tűnik a kockázatuk;

– a független kereskedők összejátszhatnak, hasonló trükköket vethetnek be.

Ezekre a trükkökre és a limitek elosztására még visszatérünk.

A *monotonitás* szerint, ha az X esetén majdnem mindenütt legalább annyit veszítünk, mint az Y esetén, akkor az X kockázata legalább akkora, mint az Y-é.

Az *első fokú homogenitás* nemcsak annyit jelent, hogy mindegy, hogy miben mérjük a kockázatot (például forintban vagy ezer forintban), hanem azt is megköveteljük, hogy a pozíció mérete egyenes arányban befolyásolja a kockázatot. Ha kiszámítjuk egységnyi termék kockázatát, akkor a teljes kockázat meghatározásához nyugodtan lehet szorozni a darabszámmal.[5]

A *sallangmentesség* szerint, ha mindig egy konstanssal nagyobb a veszteség (ez a sallang), akkor egy konstanssal nagyobb a kockázat. Ha két portfólió csak abban különbözik egymástól, hogy az egyikben mindig (bármilyen esemény következik be) 10 forinttal többet vesztünk, akkor ennek 10 forinttal nagyobb a kockázata, mint a másiknak.

[4] *Artzner–Delbaen–Eber–Heath* [1999] alapján.

[5] Nagy tételek esetén ugyan lehetnek likviditási problémák, vagyis az arányosnál jobban megnövelhetik a kockázatot, de ezek egyedi, különleges esetek.

Nem koherens mérőszámok[6]

Bármennyire nyilvánvaló dolgokat követelünk meg koherens kockázati mértékünktől, ezek mindegyike – sajnos – általános esetben nem teljesül két gyakran használt kockázati (statisztikai) mértékre: a VaR-ra és a szórásszabályra. Legegyszerűbb példaként tekintsünk két véletlen változót tíz lehetséges realizáción (világállapoton), amelyeknek azonos a bekövetkezési valószínűsége (mégpedig 0, 1)!

Szórásszabályon a jövőbeli veszteségeloszlásra vonatkozó várható érték és a szórás (adott konfidenciaszinthez tartozó) számszorosát értjük. Az *1. táblázat* jobb oldali része a szórásszabály nem koherens voltát bizonyítja. Az X_2 vesztesége minden világállapotban nagyobb vagy egyenlő az X_1 veszteségénél, ennek ellenére az átlagtól kétszórásnyi eltéréssel számított kockázat itt kisebb. A szórásszabály nem monoton, így nem koherens.

1. táblázat

A VaR és a szórásszabály vizsgálata a veszteségekből

VaR				Szórásszabály		
világállapot	X_1	X_2	X_1+X_2	világállapot	X_1	X_2
1.	0	0	0	1.	1	5
2.	0	0	0	2.	2	5
3.	0	0	0	3.	3	5
4.	0	0	0	4.	4	5
5.	0	0	0	5.	5	5
6.	0	0	0	6.	5	5
7.	0	0	0	7.	4	5
8.	0	0	0	8.	3	5
9.	1	0	1	9.	2	5
10.	0	1	1	10.	1	5
VaR (85 százalék)	0	0	1	$\mathrm{E}(X_i)$	3	5
				$\sigma(X_i)$	1,41	0
				$\mathrm{E}(X_i)+2\delta(X_i)$	5,82	5

Forrás: Meyers [2000] 4. o. és 5. o. táblázatai összevonva.

Az α (például 95 százalék) kvantilishez tartozó, adott jövőbeli időpontra vonatkozó kockáztatott értéken (Value at Risk, VaR) a következő kifejezést értjük:

$$VaR_\alpha(X) = \{\inf x \mid \Pr(X \leq x) > \alpha\}.$$

Optimista felfogásban: az a minimális veszteségkvantilis, amelynél csak kisebb vagy egyenlő nagyságút veszíthetünk, legalább α százalékos (például 95 százalék) eséllyel, valamilyen jövőbeli időpontban lehetséges veszteségekre vonatkozó valószínűségeloszlás alapján. A VaR az 1990-es években nagyon népszerűvé vált a kockázatkezelésben, így még megdöbbentőbb az *1. táblázat* bal oldali része. A 85 százalékhoz tartozó VaR X_1 és X_2 esetében külön-külön számolva 0, mivel nemcsak 85 százalékos, hanem 90 százalékos biztonsággal is állíthatjuk, hogy 0-nál többet nem vesztünk (csak 0,1 az esélye az 1 veszteségnek). $X_1 + X_2$ veszteségeloszlását együtt vizsgálva, viszont nem jelentkezik diverzifikációs hatás, a teljes portfólió VaR-ja 1.

A VaR nem koherens, mivel találtunk egy olyan példát, amikor nem szubadditív. A következő három példa további, hasonló forrásból fakadó problémákra figyelmeztet.

[6] *Meyers* [2000] alapján. A szerző a biztosításmatematikusok „koherens útra térítője”.

1. példa: a VaR ellen: hitelkockázat (*Albanese* [1997]). Tekintsünk egy nem diverzifikált vállalati kötvényportfóliót! Olyannyira nem diverzifikált ez a portfólió, hogy csupán egyetlen vállalat kötvényébe fektettünk. Tegyük fel, hogy a kockázatmentes kamatláb zéró, ezen felvettünk 1 millió forint hitelt. Minden vállalati kötvény kamatfelára *(spread)* 2 százalék, a vállalatok 1 százalék eséllyel csődbe mennek, és nem fizetnek vissza semmit. Mekkora a 95 százalékos megbízhatósági szinthez tartozó VaR?

Ha nem megy csődbe ez a cég, akkor 20 ezer forintot nyerünk, s legalább 95 százalékos biztonsággal ez teljesül. A VaR negatív, nincs mitől tartanunk.

Mi történik akkor, ha nem tetszik nekünk a kockázat ilyen mértékű kiéleződése, és diverzifikálunk? Osszuk szét kölcsönkapott tőkénket 100 egyenlő (10 ezer forintos) részletre, 100 különböző vállalat kötvényét vegyük meg! Annak az esélye, hogy legalább két vállalat csődbe megy (és 20 ezer forintot vesztünk rajtuk):

$$P_{(\text{legalább kettő csődbe megy})} = 1 - P_{(\text{1 vagy 0 megy csődbe})} = 1 - 100 \times 0{,}01 \times 0{,}99^{99} - 0{,}99^{100} \approx 0{,}2642.$$

Már a 74 százalékos VaR is pozitív, nem is beszélve a 95 százalékosról. A VaR kockázatmérési módszer most annak ellenére nagyobb kockázatot mutat, hogy diverzifikációt hajtottunk végre. Ha ezt használjuk, akkor kockázatkoncentrációra ösztönözhetjük a szabályozott szereplőket.

2. példa: a VaR-korlátokat kijátszó portfóliókezelők (*Artzner és szerzőtársai* [1999]). A VaR-alapú kockázatmérés ráadásul rossz kockázatelosztásra is ösztönözheti a befektetési menedzser portfóliókezelőit. Tekintsük a *2. táblázatban* szereplő egyszerű, de szemléletes példát!

2. táblázat
Valószínűségek, világállapotok és kifizetések

Valószínűség	Világállapot	*A*	*B*	*C*
0,94	1.	300	300	300
0,03	2.	–100	–80	–120
0,03	3.	–100	–120	–80

Forrás: Artzner és szerzőtársai [1999] 15. o. alapján.

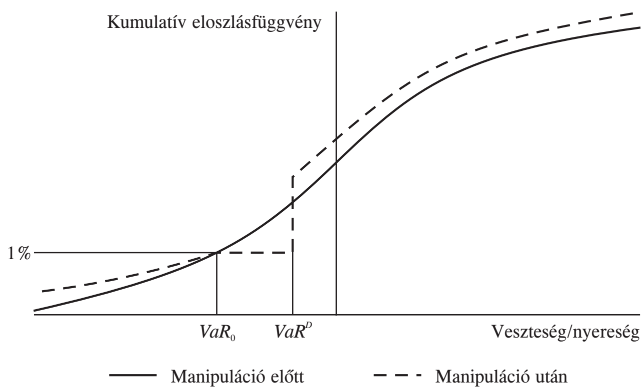
Tegyük fel, hogy a három lehetséges világállapotban két kereskedő azonos pozíciót tart, mindketten *A* kifizetéssel szembesülnek.[7] Pozícióiknak 95 százalékos VaR-ja 100 (fejenként), mivel a diszkrét nyereségeloszlást jobbról kumulálva 0,94 + 0,03 = 0,97-et kapunk, vagyis 97 százalékos biztonsággal is állíthatják mindketten, hogy nem vesztenek többet 100-nál. Ha a portfóliókezelők megállapodnak (fogadnak) egymással, a 2. és a 3. világállapot között transzferálva 20 egységet (2. világállapotban az egyik, 3. világállapotban a másik nyer 20-at), akkor az egyik a *B*, a másik a *C* pozícióra számolhatja a VaR-ját. Rövid gondolkodás után mindketten a 80-as értékhez jutnak (ennél többet 95 százalékos eséllyel nem vesztenek), sikerült csökkenteniük a kockáztatott értéküket.[8] A baj csak az, hogy ha a kereskedők kockázatkerülők, akkor mindkettőjüknek csökkent a várható hasznossága, mivel a biztos 100-as veszteséget elcserélték a várható értékben 100-as nagyságra (0,5×80 + 0,8×120 = 100).

[7] A 300-as érték természetesen tetszőleges pozitív szám lehet.
[8] Ha még többet transzferálnak, a VaR negatív is lehet 95 százalékos szinten.

3. példa: morális kockázat, VaR manipulálás. Ez a példa azt szemlélteti, hogy egy banknak lehetősége van VaR-limitjének „kozmetikázására”, opciók használatával (*Daníelsson* [2001]). A szabályozó számára ez a tevékenység rejtett marad *(hidden action),* morális kockázat jelenik meg. Tegyük fel, hogy a bank jelenlegi kockáztatott értéke 1 százalékon, adott időtávra VaR_0. Ezt a szintet egy kívánatos, kisebb VaR^D-re csökkentheti, ha eladási kötelezettséget vállal $VaR_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) kötési árfolyamon, és eladási jogot vesz $VaR^D + \varepsilon$ lehívási árfolyamon *(1. ábra).*[9]

Az eladási jog és az eladási kötelezettség semlegesítik egymást a két VaR-szint között, de növelik a nagyobb veszteségek valószínűségét, így csökkentik a várható hozamot, és növelik az eloszlás farkát. Az eredmény: kisebb VaR-érték, de intuitíve nagyobb, kiéleződött kockázat.

1. ábra
VaR-manipulálás opciókkal



Forrás: Daníelsson [2001] 17. o.

Koherens mérőszámok

Az ellenpéldák alkalmasak annak bizonyítására, hogy valamilyen mérőszám speciális esetben nem koherens. Ha azt szeretnénk belátni, hogy egy kockázati mérték mindig koherens, akkor nem célszerű végigzongorázni az összes lehetséges eloszlást, hanem alkalmazzuk az úgynevezett reprezentációs tételt, amely könnyebben ellenőrizhető kritériumokat fogalmaz meg. E tétel segítségével szemléletesebben jellemezhetjük a koherens kockázati mértékeket. A reprezentációs tétel érthetőségét segíti, ha előtte bemutatjuk a SPAN letéti követelményt, amelyet később összevetünk az Értékpapír- és Tőzsdefelügyelet (SEC) követelményeivel.

Modellfüggő SPAN letéti követelmények. A SPAN portfólióalapú letéti követelményt ír elő: nem külön-külön kell a portfólió összetevőire letétet képeznünk, mivel a kockázatok részben semlegesíthetik egymást. Meg kell vizsgálni, hogy mekkora az összetett opciós pozíció lehetséges vesztesége adott időtávon és paraméterkonstellációban (árfolyam, volatilitás), valamilyen jól definiált eljárás (modell) használatával. Rögzíteni kell, hogy a

[9] Az alaptermék a bank vesztesége. A származtatott termékek arra szóló fogadások, hogy a bank vesztesége mekkora lesz. Az eladási kötelezettségnél pl. a bank arra fogad, hogy (VaR_0-ε)-nál kisebb lesz a vesztesége. Ha veszít (nagyobb a vesztesége), akkor az opción is veszít, így vastagabb lesz az eloszlás farka.

3. táblázat
14 lehetséges eset az árfolyam- és a volatilitásváltozásra

Árfolyam	Volatilitás	
	+1	–1
–3/3	13	14
–2/3	9	10
–1/3	5	6
0	1	2
1/3	3	4
2/3	7	8
3/3	11	12

Forrás: Száz [1999] 559. o.

3. táblázatban mekkora az egységnyi árfolyam-, illetve volatilitásváltozás, így 14 esetet kapunk.

A Londonban használt módszer során az eljárásba a 14 esetet és két extrém árfolyamváltozást táplálva kiszámítjuk, hogy mekkora a veszteség. Opciós pozícióknál könnyen elképzelhető, hogy az első esetben (0 árfolyam-, 1 volatilitásváltozás) szenvedjük el a legnagyobb veszteséget, ezért a 16 helyen „végigtapogatjuk” a veszteségeket, és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat.

A chicagói CME-n (Chicago Mercantile Exchange) a *3. táblázatbeli* 14 esetből a legnagyobb veszteség 65 százaléka, és 2 extrém árfolyam-elmozdulás közül a nagyobb veszteséget adó 35 százalékaként adódik a letéti követelmény. Ez a letéti követelmény 28 általánosított forgatókönyv[10] közül a legnagyobb veszteséget adót választja. A reprezentációs tétel kockázati mértékcsaládjai ilyen általánosított forgatókönyvek.

A reprezentációs tétel (*Artzner és szerzőtársai* [1999], magyarázat: *Meyers* [2000]). A tétel szerint egy kockázati mérték pontosan akkor koherens (azaz kielégíti a négy axiómát), ha
– veszünk egy valószínűségi mértékcsaládot (Π);[11]
– a kockázati mérőszám értéke egyenlő az ebből a családból vett valószínűségeloszlások (*P*) szerint számított *veszteség* diszkontált várható értékeinek a szuprémumával:

$$\rho(x) = \sup\left\{E_P\left(\frac{X}{d}\right) \mid P \in \Pi\right\}.$$

Arra a meglepő következtetésre jutottunk, hogy *minden koherens kockázati mérőszám* különböző általánosított forgatókönyvek közül a legrosszabban bekövetkező veszteséget méri; másként fogalmazva: a legrosszabb (elemi) esetek veszteségének súlyozott átlaga. Minél több forgatókönyvet veszünk számításba, annál konzervatívabb (nagyobb) a kockázati mérték.

A chicagói SPAN letéti követelménynél az árfolyam- és volatilitásváltozás 16 eseményből álló terét olyan részhalmazokra osztottuk, ahol a $14 \times 2 = 28$ részhalmaz egyik eleme a 14 normális elmozdulásból (65 százalékos súllyal), másik eleme a 2 extrémből (35 százalék) adódott.

[10] A 14 darab normális elmozdulás 65 százalékos eséllyel és a 2 darab extrém 35 százalékossal.

[11] Diszkrét esetben úgy kapunk meg egy valószínűségi mértékcsaládot (általánosított forgatókönyveket), ha az eseményteret felosztjuk részhalmazaira, és a részhalmazok minden eleméhez rendelünk egy bizonyos valószínűséget. Ügyeljünk arra, hogy ezek összege 1 legyen, vagyis feltételes eloszlással operáljunk!

Artzner és szerzőtársai [1999] felhívják a figyelmet arra is, hogy következetes kockázatméréshez még a *modellkockázat* is figyelembe vehető, ha a forgatókönyvek (lehetséges paraméteregyüttesek) közé más modell által generált jövőbeli paramétereloszlásokat is felveszünk.

Az *explicit forgatókönyv alapú kockázatmérés* árnyoldala, hogy ha a portfólió kockázata több tucat vagy akár több száz faktortól függ, akkor nem egyértelmű, hogy milyen megfontolások alapján válasszunk szcenáriókat (*Pearson–Smithson* [2002]). Sok piaci tényező esetén ez a megközelítés elveszíti az intuitív vonzerejét, és nehéz elmagyarázni az igazgatóságnak, a szabályozóknak és egyáltalán bárkinek. Ilyenkor szignifikáns gondolkodásra és a portfólió mélyreható ismeretére van szükség, ami nem baj, mert egy olyan módszer, amelyben gondolkodni kell a számítások előtt, csak fejlesztheti a kockázatkezelést.

Mivel végtelen sok általánosított forgatókönyv elképzelhető, ezért számtalan koherens kockázati mérték áll rendelkezésünkre, tehát az axiómák nem jelölnek ki egy konkrét követendő példát. A közülük való választás (és az, hogy egyáltalán válasszuk-e őket) széles értelemben vett költség–haszon megfontolások eredménye (az előnyöket és a hátrányokat lásd később).

Fontos hangsúlyozni, hogy a számításba jövő szcenáriókat előre be kell jelenteni a szabályozottaknak, hogy tudják, hogyan mérik őket. Ezzel ekvivalens az, ha megadjuk az általunk választott koherens mértéket. Közülük kettőt részletesebben megvizsgálunk: a maximális veszteséget és a feltételes kockáztatott értéket (*Meyers* [2000]).

Az eddigi tudással felvértezve könnyen belátható, hogy a *maximális veszteség* koherens kockázati mérték. Álljon a teljes eseménytér $(\Omega)\alpha_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ elemi eseményekből. Minden α_i eseményhez tartozik egy X_i veszteség. Tekintsük a következő valószínűségi mértékcsaládot:

$$P_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \alpha_i \\ 0 & \omega \notin \alpha_i \end{cases}.$$

Könnyen látható, hogy ha a diszkontálástól eltekintünk ($d = 1$), a maximális veszteség (mint kockázati mérőszám) épp ezen a családon vett várható értékek felső határa (amely a legnagyobb érték):

$$\sup\left\{E_P\left(\frac{X}{d}\right) \mid P \in \Pi\right\} = \max(X_i).$$

A VaR azt mutatja meg, hogy adott időtávon, konfidenciaszinten maximum mekkora a veszteség nagysága. 95 százalékos megbízhatósági szinten pesszimista nézőpontból azt mondhatjuk, hogy 5 százalék eséllyel a VaR által mért kvantilisnél nagyobb lesz a veszteség. A vezetés arra kíváncsi, hogy ha bekövetkezik az 5 százalékos esemény, akkor mekkora lesz a veszteség várható értéke, átlagos nagysága.

Az α kvantilishez tartozó *feltételes kockáztatott érték* (Conditional VaR, CVaR) ezt mutatja meg:

$$\text{CVaR} = E[X \mid X > VaR_\alpha(X)].$$

A CVaR is koherens, amelynek laza bizonyításaként gondoljuk meg a következőket:

Ha a valószínűségi mértékcsalád tagjai az eseménytér n elemű részhalmazához (A_i) egyenlő valószínűségeket rendelnek (és ezeket összeadva 1-et kapunk), akkor ezt kapjuk:

$$P_i(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}.$$

Az így vett várható értékek szuprémuma a legrosszabb esetek átlaga lesz. Ezek szerint a legrosszabb esetek egyszerű átlagát adó mérőszám koherens, hasonlóan a feltételes VaR is az.

Az *1. táblázat* bal oldali része „megbuktatta" a VaR-t, nézzük, hogy a CVaR kiállja-e a szubadditivitási próbát $\alpha = 85$ százalékon! $\mathrm{CVaR}(X_1) = \mathrm{CVaR}(X_2) = 1$, ugyanis a megfelelő VaR-kvantilisnél (0) nagyobb veszteségek várható értéke 1. $\mathrm{CVaR}(X_1 + X_2) = 2$, mivel 1-nél nagyobb veszteség csak a 2 lehet. Így $\mathrm{CVaR}(X_1+X_2) \leq \mathrm{CVaR}(X_1)+\mathrm{CVaR}(X_2)$, a CVaR itt szubadditív.

A VaR összevetése a koherens mértékekkel

Láttunk koherens és nem koherens kockázati mérőszámokat, utóbbiak közül a VaR széles körben alkalmazott és a bankszabályozók által megkövetelt úgynevezett alsóági kockázatmérési eszköz.[12] Mi lehet a VaR sikerének titka? Érdemes-e javítani elvi hibáján? Lássuk az előnyöket, majd a hátrányokat!

A VaR előnyei:

– elterjedése előrelépést jelentett a nominálértékben meghatározott limitekhez képest, amikor a szabályozott felek nem vállalhatnak adott értékű nyitott pozíciónál többet;

– a tankönyvi kockázatdefiníció, a szórás csak normális eloszlás esetén[13] használható jól. A VaR eloszlásfüggetlen, kiszámítható a teljes eloszlás ismerete nélkül is szimulációs módszerekkel, ugyanakkor viszonylag könnyű foganatosítani;

– a vállalat egészének kockázatát egyetlen kockáztatott értékben összegzi (ezáltal már könnyebben értelmezhető a felső vezetés és a részvényesek számára, olyan nevező, ami segít a különböző kockázatos tevékenységek összehangolásában) (*Jorion* [1999]);

– megragadja a diverzifikációs előnyöket;

– könnyű szabályozni, ezért a szabályozók kedvelik.

A VaR bevezetése előrelépést jelent abban a tekintetben, hogy végre próbálják mérni, figyelembe venni a kockázatot. A nominális limitek és a szórás mellőzése jó ötlet volt, de a VaR bevetése nem tökéletes válasz a kihívásokra.[14]

A VaR hátrányai:

– nem késztet diverzifikációra, sőt néha kifejezetten ellehetetleníti azt;

– diszkrét, nem sima eloszlásoknál még körültekintőbben kell alkalmazni ezt a kvantilis alapú megközelítést (a hitelkockázati példa is ezt mutatta);

– a veszteségeloszlásból csak egy pontot (kvantilist) ragad ki, ami arra vezethet, hogy fedezéssel vastagabb farkú eloszlást állítunk elő;

– a VaR nem mond semmit a vártnál nagyobb veszteségek nagyságáról, vastag farkú vagy nem sima eloszlásoknál ez jelentős hiba.

Kétkedéssel fogadunk ehhez hasonló kijelentéseket: „90 százalékos VaR biztonsági szinteket határoztunk meg három üzleti területünkre, így teljes pozíciónk már körülbelül 95 százalékos szinten biztosított". A diverzifikációs hatásban bízva, azt gondolja ez a menedzser, hogy a kockázatok kioltják egymást, a teljes pozíció VaR-ja kisebb, mint a három terület egyedi kockázatának összege, így növelhető a biztonsági szint. Ez felelőtlen kijelentés, mivel a VaR *nem szubadditív*. Ez az elvi probléma megakadályozza, hogy – általános esetben – VaR-limitek felállításával a teljes pozíció kockázatosságára felső korlátot adjunk. Könnyen előfordulhat, hogy a teljes kockáztatott érték a VaR-limitek

[12] *Downside-risk measures:* a nagy veszteségek lehetőségét és mértékét kifejező mérőszámok.

[13] Illetve annak minimális általánosítása, az elliptikus eloszlások esetén.

[14] *Kondor* [2003]: „Látszik rajta, hogy hirtelen, pánikban vezették be".

összegének többszöröse, a szabályozottak látszólagos kockázatcsökkenést érhetnek el pozícióik szétválasztásával.

További érvek, ellenérvek

A kép még nem teljes, vannak még érvek mindkét oldalon, mind a VaR mellett, mind a VaR ellen. A gyakorlatban a normális eloszlás feltételezése és a VaR-limitek használata bevett szokás. A szubadditívitás kérdése is árnyalható.

Normális eloszlású veszteség esetén a VaR a szórásszabályra egyszerűsödik, a várható értékhez a standard normális eloszlás inverz függvényének α-beli értéke és a szórás szorzata adódik:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = E_{p}(X) + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \delta_{p}(X).$$

A normális eloszlás feltevésével a VaR szubadditív lesz (így koherens, mert a többi tulajdonságot nem sérti meg). Ilyenkor a korrelációk alapján kioszthatók a VaR-limitek, a teljes pozíció VaR-ja nem fogja meghaladni a limitek összegét.

Az eddig említett problémáktól eltekintve tegyük fel, hogy VaR-limitet adtak meg egy portfóliókezelő pozíciójára (ami a gyakorlatban nem ritka). A kereskedő ekkor megfelelő fedezeti technika használatával (kis kockázatú papírokba fektetve) bebiztosítja, hogy teljesül a VaR korlátja. A fennmaradó tőkét várható hozamának maximalizálására használja: például nagyon magas kötési árfolyamú, olcsó, nagy valószínűséggel nyereséggel nem lehívható vételi jogot vesz (OTM-opciókat – *out-of-the-money*). Ha magas lesz az alaptermék árfolyama, akkor kis valószínűséggel hatalmas a hozam, ellenkező esetben nagy valószínűséggel negatív a hozam, vagyis veszteség keletkezik, mivel a portfóliókezelő elveszti az opciós díjat. Ezt a jelenséget nevezi a szakirodalom kaszinóhatásnak.[15] *Walter* [2002] rámutat, hogy pótlólagos kockázati kritériumként a feltételes VaR-t (amely koherens) is figyelembe véve csökkenthető a kaszinóhatás, természetesen a várható hozammal együtt.

Igaz, hogy a VaR implicit módon, egy számmal való szorzással átalakítható (szubadditív) feltételes VaR-rá (CVaR), de ez a módszer *Daníelsson* [2001] szerint nem ajánlott. Ha más mérőszámra van szükség, akkor azt expliciten jobb modellezni, mivel kétséges eloszlásfeltevéseken múlik az a szám, amellyel szorozni kell. A feltételes VaR explicit alkalmazásakor azonban sokkal több adat kell az utótesztelésre. Egyébként azt a tény, hogy a VaR nem szubadditív, nem feltétlenül komoly probléma. Megmutatható, hogy a VaR és a CVaR ugyanúgy rangsorol kockázatos projekteket kellően magas konfidenciaszinteken.[16]

Modellmentes letéti követelmények (SEC)

Válasszunk egy koherens kockázati mértéket (a maximális veszteséget), és vizsgáljunk meg a SPAN után egy másik tőzsdei letéti követelményrendszert, a SEC előírásait! A két módszer összehasonlítása érdekes összefüggésekre derít fényt.[17]

Azonos lehívási időpontra vonatkozó vételi jogaink és eladási kötelezettségeink *(call opcióink)* vannak, erre a portfólióra a SEC letétet ír elő.

Feltevések. Az opciós díjaktól eltekintünk, azokat már kifizettük vagy megkaptuk. Lejárati árakon számolunk. A diszkontálástól eltekintünk, mivel rendszerint a letéti ka-

[15] A VaR-limittel korlátozott kereskedő implicit hasznosságfüggvénye kockázatkerülő magatartást mutat a VaR-kvantilisnél nagyobb veszteségekre, máshol viszont kockázatsemlegeset.

[16] *Daníelsson* [2001] alapján, a hasznosságfüggvények másodrendű sztochasztikus dominanciája is feltétel.

[17] A *Denault* [2001] közöl egy SEC letéti követelmény kiszámítási példát (24. o.), amit részletesen bemutatunk (ábrákkal illusztrálva és új megoldásokkal). A példa folytatása elvezet a koherens tőkeallokáció területére.

mat nagysága jelentéktelen vagy nulla. Öt kötési árfolyam lehetséges: 10, 20, 30, 40 és 50. Pozíciónk ($\mathbf{C}_\mathbf{p}$, ahol **p** a lehetséges lehívási árfolyamok vektora) *(4. táblázat).*

4. táblázat
Különböző kötési árfolyamú call opciók az összetett opciós pozícióban

Kötési árfolyam	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}
Darabszám	–1	–2	8	–7	2

Forrás: Denault [2001] 24. o.

Portfóliónkban van 1 darab 10-es lehívási árfolyamú eladási kötelezettség (*short call, SC*), 2 darab 20-as *SC*, 8 darab 30-as vételi jog (*long call, LC*) stb. A SEC azt kéri, hogy adjunk meg ezzel ekvivalens pozíciót vertikális különbözetek *(spread)* és pillangók *(butterfly)*,[18] összefoglalóan standard kockázati termékek segítségével.

A bázeli standard modellhez hasonlóan minden terméknek megvan a letéti követelménye, de a SPAN eljárással ellentétben itt nem valamilyen modellt használva kell a portfólió veszteségeloszlását „letapogatni". Ugyanakkor a modellmentes módszerek hátránya, hogy ha új termékek jelennek meg (például katasztrófakötvények), akkor át kell írni a szabályokat, meg kell adni az új követelményeket. Egy jól definiált modellt használva az eljárás általában alkalmazható lenne az új termékre is.

A SEC előírásaiban erősödő különbözetre és a vett pillangókra nincs letéti követelmény. A maximális veszteség (koherens kockázati mérték) húzódik meg a koncepció mögött, ahogy a következő példák mutatják *(5. táblázat).*

5. táblázat
Standard kockázati termékek letéti követelménye

Pozíció	Elnevezés		Letét
	angol	magyar	
$S40,\ 10 = LC40 + SC10$	*bear spread*	gyengülő különbözet	30
$S30,\ 40 = LC30 + SC40$	*bull spread*	erősödő különbözet	0
$BS40 = SC30 + 2 \times LC40 + SC50$	*short butterfly*	eladott pillangó	10
$BL30 = LC20 + 2 \times SC30 + LC40$	*long butterfly*	vett pillangó	0

Denault [2001] jelölésrendszere: S = spread (különbözet), majd a long és a short kötési árfolyam; B = butterfly (pillangó), SC = short (eladott), L = long (vett); az adott árfolyamra „centírozva".

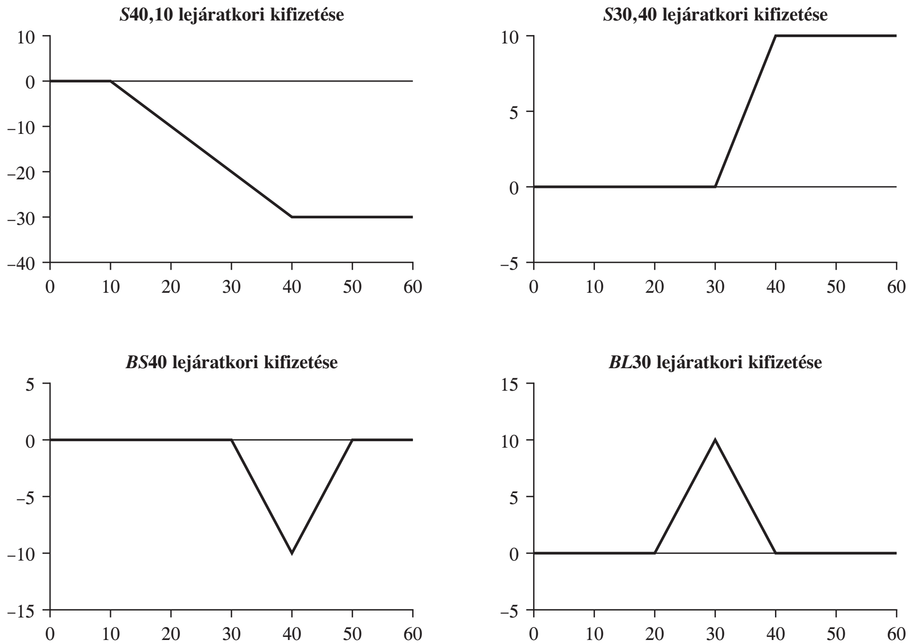
Erősödő vételi különbözeten nem lehet veszteni, ezért nincs letéti követelmény. Gyengülő különbözeten maximum a két kötési árfolyam különbségét veszthetjük, ennyit tegyünk le! Eladott pillangó maximális vesztesége (ha 10-es egységenként változik a lehívási árfolyam) 10. Vett pillangón csak nyerni lehet (ezért fizettünk érte), itt sincs letét.

A *2. ábra* néhány példát mutat, amelyeket az *5. táblázat* pozícióinak (opciós díjaktól eltekintett) nyereségét ábrázolja az alaptermék lejáratkori árfolyamának függvényében.

[18] *Különbözet:* ugyanarra a lehívási időpontra vonatkozó $LC(K_1) + SC(K_2)$. Ha $K_1 < K_2$ erősödő különbözetről *(bullish spread),* ha $K_1 > K_2$ gyengülő különbözetről *(bear spread)* beszélünk. *Pillangó:* ugyanarra a lehívási időpontra vonatkozó $LC(K_1) + 2SC(K_2) + LC(K_3)$, ahol $K_1 < K_2 < K_3$. Példánkban a lehívási árfolyamok 10-esével követik egymást a pillangókban.

2. ábra

Különbözetek és pillangók kifizetése az alaptermék lejáratkori árfolyamának függvényében



A SEC lineáris programozási feladat

Annyi pozíciónkkal ekvivalens különbözeteket és pillangókat kell bejelentenünk, hogy az általuk generált opciók darabszámai azonosak legyenek a kiinduló pozíciónkkal, és a letéti követelményünk a lehető legkevesebb legyen. Tulajdonképpen egy lineáris programozási feladattal (LP) írható le a probléma, amelyet a *3. ábra* mutat be.

3. ábra

SEC–LP

$\min \mathbf{f}^t\mathbf{Y} \leftrightarrow \max -\mathbf{f}^t\mathbf{Y}$		$\min \text{ä}^t\mathbf{C}_\mathbf{P}$
$\mathbf{AY} = \mathbf{C}_\mathbf{P}$	$\leftrightarrow$	$\text{ä}\mathbf{A} \geq -\mathbf{f}$
$\mathbf{Y} \geq 0$		ä tetszőleges
(Primál)		(Duál)

A primálfeladatban **Y** jelöli az összes lehetséges különbözet és pillangó darabszámainak vektorát, ez a változónk, csak nemnegatív lehet. Ha negatív lenne, akkor ahelyett, hogy például van (–1) vett pillangónk, azt mondjuk, hogy van 1 eladott pillangónk.

A letéti követelményt kell minimalizálnunk, amit $\mathbf{f}^t\mathbf{Y}$ ad meg, ahol f^t az ismert letéti követelményű különbözetek és pillangók díjvektora.

Az **A** mátrix oszlopai a különböző lehívási árfolyamokhoz tartozó vételi opciók darabszámát mutatják, az **Y** vektor elemeinek (a standard kockázati termékeknek) megfelelően. Az első oszlopokban legyenek a vett különbözetek, majd az eladottak, végül a pillangók.

6. táblázat
Az **A** mátrix*

	Különbözetek																				Pillangók						
	vett (long)										eladott (short)										vett			eladott			$\mathbf{C_P}$
C_{10}	1	1	1	1	–	–	–	**–**	–	–	–1	**–1**	–1	–1	–	–	–	–	–	–	**1**	–	**–**	–1	–	–	–1
C_{20}	–1	–	–	–	1	1	1	**–**	–	–	1	**–**	–	–	–1	–1	–1	–	–	–	**–2**	1	**–**	2	–1	–	–2
C_{30}	–	–1	–	–	–1	–	–	**1**	1	–	–	**1**	–	–	1	–	–	–1	–1	–	**1**	–2	**1**	–1	2	–1	8
C_{40}	–	–	–1	–	–	–1	–	**–1**	–	1	–	**–**	1	–	–	1	–	1	–	–1	**–**	1	**–2**	–	–1	2	–7
C_{50}	–	–	–	–1	–	–	–1	**–**	–1	–1	–	**–**	–	1	–	–	1	–	1	1	–	–	**1**	–	–	–1	2
$\mathbf{f^t}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	20	30	40	10	20	30	10	20	10	0	0	0	10	10	10	

*A vastagon szedett számok már egy megoldás összetevőit mutatják.

A *6. táblázatban* látható az – öt lehívási árfolyam feltevésének megfelelő – **A** mátrix, amelynek első oszlopa $LC_{10} + SC_{20}$ vett különbözet, 11. oszlopa az első eladott különbözet ($SC_{10} + LC_{20}$), az utolsó oszlopokban pedig a pillangók „röpködnek”. Minden oszlop alatt látható az adott standard kockázati termék letéti követelménye. Összeadva az optimális megoldásban a pillangókhoz és a különbözetekhez tartozó vételi opciókat, az eredeti $\mathbf{C_p}$ pozíciót kell kapnunk.

A *duális változó* (a $\mathbf{\ddot{a}}$ vektor, ami tetszőleges lehet) a különböző lehívási árfolyamokhoz tartozó opciók árnyékárának ellentettje, ugyanis a dualitási tétel miatt az optimumban:

$$\mathbf{f}^{\mathbf{t}}\mathbf{Y}^{*} = -(\mathbf{\ddot{a}}^{*})^{\mathbf{t}} \times \mathbf{C_p}.$$

Láttuk, hogy a primális, standard letétmeghatározási probléma során nem „tapogatjuk le” az alaptermék lehetséges árfolyamait a vételi opciók kockázatosságának (és így letéti követelményének) meghatározásához. A duális feladatban mégis (az árnyékárakon keresztül) megjelenik egy implicit, forgatókönyv alapú kockázatértékelés, a következők miatt.

A duális változót korlátozó egyenlőtlenség több standard kockázati termék esetén (szélesebb **A** mátrix) több feltételt ír elő $\mathbf{\ddot{a}}$-ra, így csökkentve annak szabadságfokát és az implicit módon figyelembe vett kedvezőtlen forgatókönyvek számát. Minél több a standard kockázati termék, annál kevesebb forgatókönyvvel számolunk a SPAN letéti követelmények fogalmát használva. Találtunk egy matematikai (duális) kapcsolatot a SPAN és a SEC módszer között! A duális változó a tőkeallokációnál még fontos szerephez jut.

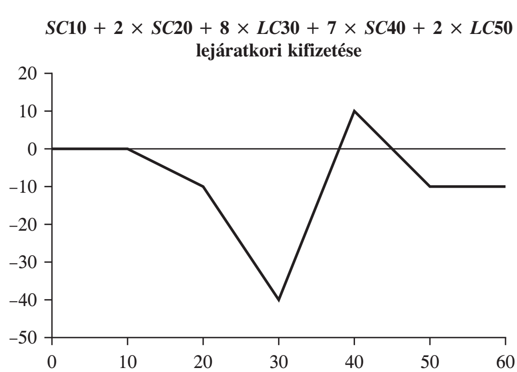
7. táblázat

Egész értékű SEC–LP megoldás különbözetek és pillangók használatával

Darab	Letét/darab	Pozíció	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}
3	0	*S*30,40	0	0	3	–3	0
2	20	*S*30,10	–2	0	2	0	0
1	0	*BL*20	1	–2	1	0	0
2	0	*BL*40	0	0	2	–4	2
Összesen	40		–1	–2	8	–7	2

4. ábra

Az összetett opciós pozíció lejáratkori kifizetése



A lineáris programozási feladatot GAMS szoftverrel oldottuk meg. Különböző megoldókat (solvereket) használva végül sikerült egész értékű megoldást is kapni (*7. táblázat)*[19]

Csak az *S*30,10 gyengülő különbözetekért kell darabonként 20 egységet letennünk, így a teljes letéti követelmény 2×20=40. Az eredmény nem meglepő, ha megvizsgáljuk a kiinduló $\mathbf{C}_p$ összetett opciós pozíciónk lejáratkori kifizetését az alaptermék árfolyamának függvényében. A *4. ábrán* jól látható, hogy a maximális veszteség 40, amelyet akkor szenvedünk el, ha 30 lesz az alaptermék árfolyama.

A pillangók szerepe

A lineáris programozási és a „grafikonos" megoldás azonos eredményt adott. Könnyelműen kijelenthetjük, hogy a standard kockázati termékek száma elegendő szabadságfokot biztosít arra, hogy a bejelentett (eredetivel ekvivalens) pozícióban is maximum 40 egység letétet kell kifizetnünk, ugyanakkor – a következetes kockázatmérés miatt – hiába „bűvészkedünk", 40 alá nem tornászhatjuk a letéti követelményt.

A 40 valóban alsó korlátként szolgál, de a szabadságfokkal (és a felső korláttal) lehetnek gondok. Feltehető a kérdés, hogy miért nem elég csak a különbözeteket bevenni a bejelenthető pozíciók közé. Számítsuk ki a minimális letéti követelményt, ha *csak különbözetek*et használhatunk! Az optimális megoldást a *8. táblázat* tartalmazza.

8. táblázat

SEC–LP megoldás pillangók nélkül

Darab	Letét/darab	Pozíció	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}
5	0	*S*30,40	–	–	5	–5	–
1	10	*S*20,10	–1	1	–	–	–
3	10	*S*30,20	–	–3	3	–	–
2	10	*S*50,40	–	–	–	–2	2
Összesen	60		–1	–2	8	–7	2

Hogyhogy 60 lett a letéti követelmény? Az intuitíven várt 40 már nem biztosítható, ha nem használhatjuk ki a vett pillangók nyújtotta lehetőségeket. Ha kevés a standard kockázati termékek száma, akkor túl sok implicit forgatókönyvet veszünk számításba a kockázat meghatározásakor (lásd duál). Olyan ez a jelenség, mintha egy stresszteszt során azokat az együttállásokat is megvizsgálnánk, amelyekről tudjuk, hogy nem következhetnek be egyszerre. Ha nincs modell (és így forgatókönyv-szűkítés) egy stresszteszt mögött, akkor az eredmény csak fenntartásokkal fogadható el. Már *Merton* [1973] óta ismert, hogy az opciók ára a kötési árfolyam konvex függvénye, vagyis a vett pillangó értéke csak pozitív lehet. Attól a forgatókönyvtől tekintsünk el, amelyben ez nem teljesül! 2000-ig nem lehetett a pillangókat használni, de – többek között – az *Artzner és szerzőtársai* [1999] cikk hatására felvette őket a szabályozó (SEC) a standard kockázati termékek közé.

[19] A CPLEXPAR solver talált egész értékű megoldást. *Denault* [2001] egész értékű megoldást nem közöl, ez általában nem is garantálható az **A** mátrix nem unimoduláris volta miatt.

Koherens tőkeallokáció

Tegyük fel, hogy a SEC letéti követelményének példájában az ötféle lehívási árfolyamhoz tartozó összetett opciós pozíció vállalatunk három szervezeti egységének az eredője a *9. táblázat* szerinti összetételben.

9. táblázat
Három részleg eredőjeként adódó összetett opciós pozíció vizsgálata – 1.

	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}	Letéti követelmény
C_{P1}	–1	0	6	–6	1	20
C_{P2}	0	–2	2	0	0	20
C_{P3}	0	0	0	–1	1	10
Összesen	–1	–2	8	–7	2	40

Forrás: Denault [2001] 24. o.

A sorokban részlegenként leolvashatjuk a megfelelő pozíciókat, a három sorvektor összege a már megismert $\mathbf{C_P}$ vektor transzponáltját adja. A SEC–LP lineáris programozási feladatot még háromszor megoldva megkaptuk a letéti követelményeket. Figyelemre méltó, hogy az egyedi letéti követelmények összege (20 + 20 + 10 = 50) nagyobb, mint az egész vállalaté (40, ennyi a letét). A keletkező 10 nyereséget valahogy el kell osztani, allokálni kell a vállalaton belül, lehetőleg következetesen.

Tulajdonképpen egy költségmegtakarítás elosztásáról van szó. Világos, hogy csak szubadditív kockázati mérőszám esetén van ilyen megtakarítás.[20] A koherens kockázatmérés után eljutottunk a koherens tőkeallokációhoz. A megoldásban segítségünkre lesz a kooperatív játékelmélet.

Kooperatív játékelmélet

Egy kooperatív játék összetevői:

– a játékosok: $N = \{1,\ldots,n\}$, ahol $2 \leq n < \infty$,

– a koalíciós függvény, c: $2^N \to \Re$, amire $c(\emptyset)=0$.

A játékosok szerződésekben elkötelezhetik magukat, egyezkedhetnek, koalíciókat formálhatnak. A koalíciós függvény a játékosok minden részhalmazához (koalíciójához) megadja azok költségét.[21] A részhalmazok száma 2^N, ha az üres halmazt is beleszámítjuk, amelynek a költsége definíció szerint nulla.

Általában feltesszük, hogy létrejön a nagykoalíció, megéri mindenkinek összefogni. Ha mégsem jönne létre, akkor csak néhány esetet kell megvizsgálni, és mindegyikben az a nagy kérdés, hogy hogyan osszuk el az összefogás nyereségét. Egy kooperatív játék tehát egy (N, c) páros, a játékosok számával és a koalíciós függvénnyel megadva.

A *8. táblázat* játékelméleti megközelítésében a három részleg játssza a játékosok sze-

[20] Banki szemszögből nézve a költségelem a tőke, ennek az elosztása a tőkeallokáció. Ha tudnánk, hogy az egyes eszközökhöz (dealerekhez) mekkora tőkét kellene következetesen allokálni, akkor összetevőire tudnánk bontani a teljes banki kockázatot, s azonosítható lenne a kockázathoz leginkább hozzájáruló eszköz. A tőkeallokáció és a kockázatfelbontás ekvivalens fogalmak, mivel a kockázatot az allokált tőke nagyságával mérjük.

[21] Általában nyereségből szoktak kiindulni, de –1-gyel való szorzás után már költségekről beszélhetünk.

repét, már csak a koalíciós függvényre van szükségünk. Általános esetben (ha portfóliók jövőbeli veszteségét X_i valószínűségi változó mutatja, és ρ kockázati mértéket használunk) a játékosok S koalíciójának költsége könnyen származtatható a kockázati mértékből:

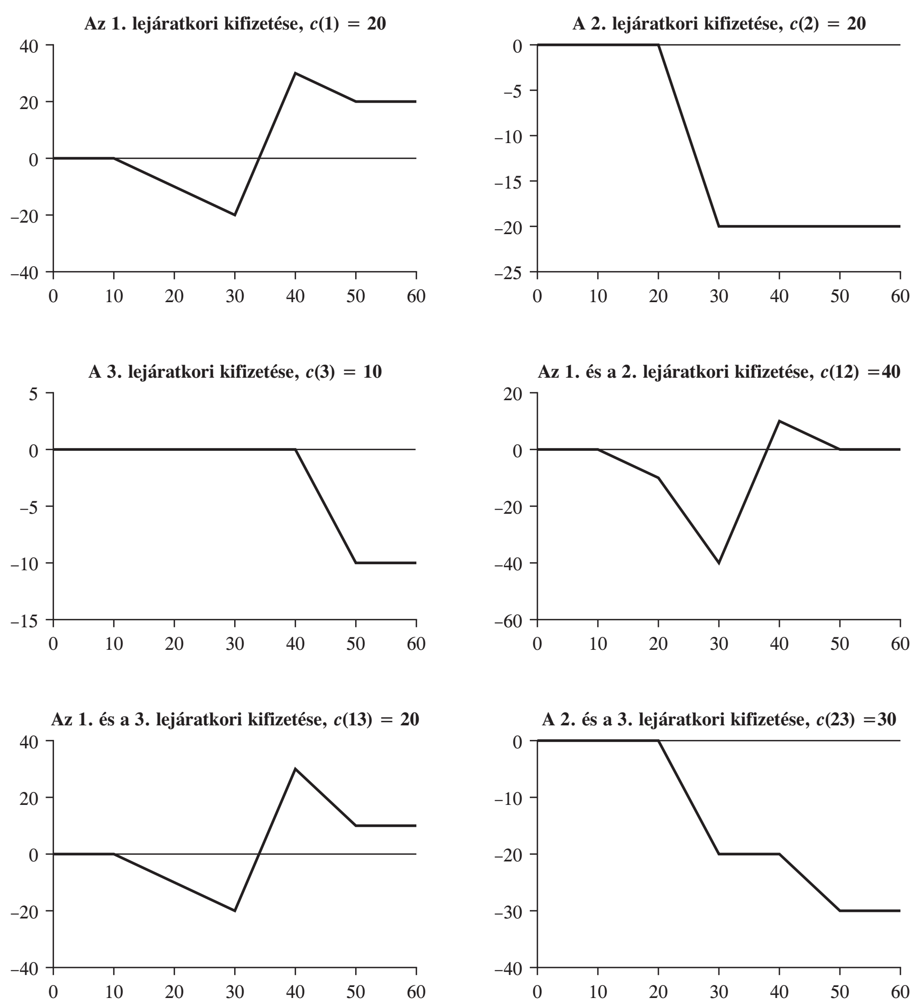
$$c(S) \equiv \rho\left(\sum_{i \in S} X_i\right).$$

A költség kiszámításához adjuk össze a koalícióbeli játékosok jövőbeli veszteségeinek valószínűségi változóit, és adjuk meg ennek a kockázatát (például a maximális veszteségét).

Konkrét példánkban a három játékosnak (Cp_i helyett 1, 2, 3 jelölje a részlegeket) hat valódi részhalmaza van, erre a hat esetre még meg kell oldanunk a lineáris programozási feladatokat. Látványosabb, ha ábrázoljuk a hat eset maximális jövőbeli veszteségét az árfolyam függvényében – tudjuk, hogy ezt megtehetjük a pillangóknak köszönhetően *(5. ábra)*.

5. ábra

A portfólióegyesülések kifizetései az alaptermék lejáratkori árfolyamának függvényében



Az *5. ábra* a C_{P1}, C_{P2}, C_{P3}, $C_{P1}+C_{P2}$, $C_{P1}+C_{P3}$, $C_{P2}+C_{P3}$ pozíciók lejáratkori lehetséges értékeit mutatja, az árfolyam függvényében. A *10. táblázatból* rendre leolvashatók a koalíciók (portfólióegyesülések) költségei.[22]

10. táblázat

A koalíciós függvény

$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$	$c(1, 2)$	$c(1, 3)$	$c(2, 3)$	$c(1, 2, 3)$
20	20	10	40	20	30	40

Az első részleg egyedül 20-at veszít maximálisan, az egyes és a kettes együtt 40-et stb. A játékosok (alportfóliók, részlegek) széles körű stratégiai lehetőségeit mutatja, hogy bárki bárkivel szövetkezhet. Itt is létrejön a nagykoalíció, a maximális veszteség mint koherens kockázati mérték szubadditivitásából következik, hogy mindig megéri bevenni még egy részleget a „koalícióba", mert az összeolvadás nem hoz létre extraveszteséget. Így azonban 10 egységgel csökken a letéti követelmény. Hogyan osszuk el ezt következetesen a részlegek között, az *ad hoc* – mindenki 10/3-ot kap – módszeren túlmutatva?

Koherens allokációs elv

Denault [2001] a következő definíciót adja: allokációs elven egy olyan vektort értünk ($\mathbf{K}$), amelynek az elemei (K_i) megadják az adott elv szerint a játékosokra szabott költségeket (kockázatokat). Természetesen teljesül a $\Sigma K_i = c(N)$ egyenlőség, vagyis a kirótt költségek összege egyenlő a nagykoalíció költségével. Azt mondjuk, hogy egy koherens kockázati mértékre épülő allokációs elv koherens, ha teljesíti a következő három kívánalmat.

1. *Nem blokkolható* (a mag eleme). A stratégiai lehetőségeket is figyelembe véve úgy osszuk el a közös költségeket (tőke- vagy letéti követelményt), hogy egyik S koalícióra se háruljon több, mint amennyit kilépve a nagykoalícióból (és blokkolva azt) maximálisan vesztene:

$$\sum_{i \in S} K_i \leq c(S) \qquad \forall S \subseteq N.$$

Például az első részlegre ne háruljon 20-nál nagyobb letét, mert egyedül is maximum ennyi lenne a követelménye. A második és a harmadik játékosra se háruljon együtt 30-nál több, mert $c(2, 3) = 30$.

2. *Szimmetria.* Megköveteljük, hogy ha két játékos kockázathoz való hozzájárulása teljesen azonos (csak a nevük különbözik), akkor a közös megegyezés során azonos költséget hárítsunk rájuk.

3. *Kockázatmentes allokáció.* A kockázatmentes portfólió következetes allokációbeli költsége csak 0 lehet.

A koherens kockázati mérték sallangmentességéből következik hogy egy kockázatmentes portfólió tőkekövetelménye nulla, de az nem, hogy az allokációs elv is ekkora terhet ró rá, ezért ez a tulajdonság is megkövetelendő.

[22] $c(1, 2, 3) = 40$ a *4. ábrán* látható, mivel az a három részleg pozíciójának eredőjét ábrázolja.

Kooperatív játékelméleti tőkeallokációs koncepciók

Több kooperatív játékelméleti koncepció is van a költség/nyereség elosztására, allokációs vektorok kiválasztására (*Forgó* [1974], *Solymosi* [2002] alapján). Keressük ezek közül a koherens – az előbbi definíciónak megfelelően – és az egyértelmű elvet!

A koherens tőkeallokáció megköveteli, hogy a mag elemei közül válasszunk, ezáltal – a stratégiai szempontokat is figyelembe véve – egyik koalíció sem blokkolhatja az allokációt. Belátható, hogy koherens kockázati mérték esetén a mag nem üres, van olyan allokáció, amely nem blokkolható (*Denault* [2001] 9. o.). Ha egyenlően osztjuk el a költségeket, akkor könnyen előfordulhat, hogy valakire nagyobb költséget hárítunk, mint amennyit egyedül kellene elszenvednie. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyszemélyes „koalíció" blokkolja az elosztást, amely így nem koherens. Az egypontos megoldási koncepciók közül az egyenlősdi elvetése után vizsgáljuk meg a történetileg először felbukkant, máig használt allokálási módszert, a Shapley-értéket![23]

A Shapley-érték

A következő képlet a Shapley-féle értékvektor i-edik komponensének kiszámítását mutatja. A Shapley-érték tehát egy vektor, amelynek a dimenziója a játékosok számával egyenlő, elemei pedig az egyes játékosokhoz rendelt költségek (letéti követelmények).

$$K_i^{Sh} = \sum_S \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[c(S) - c(S \setminus \{i\})], \qquad i \in N.$$

Vegyük a játékosok halmazának (N) olyan részhalmazait (S), amelyek tartalmazzák az i-edik játékost. Legyen itt a játékosok száma s! Képzeljük el, hogy a játékosok minden lehetséges permutációban felsorakoznak, és elindulnak egy Shapley-értéket számító „hivatalnok" felé. Amikor az i-edik játékos a hivatalnokhoz ér, akkor ő kiszámolja (az i-edikkel együtt) az eddigi költségeket, vagyis $c(S)$-t. Meghatározza az i-edik előttiek költségét is, és megnézi, hogy az i-edik mennyivel növelte az őt megelőzők terheit. Az i-edik előtt $(s - 1)$-en érkeznek a hivatalnokhoz, $(s - 1)!$-féle sorrendben. Az i-edik után még marad $(n - s)!$ érkezési lehetőség. Az összes permutáció száma n játékosra $n!$, így a Shapley-érték i-edik komponense az i-edik játékos várható határ-hozzájárulása a költségekhez, ha azonos valószínűséget adunk minden permutációnak. Visszatérve az opciós példánkhoz, a *11. táblázatban* – a *9. táblázatot* kibővítve – láthatjuk az üzleti egységek Shapley- (és a később ismertetendő Aumann–Shapley-) érték szerinti letéti követelményeit. A tíz nyereségen az első és a harmadik játékos egyenlő mértékben (5-5) osztozik.

Belátható, hogy a Shapley-érték az egyetlen

– hatékony (mindent elosztunk),

– szimmetrikus (azonos hozzájárulású szereplőkre azonos költség hárul),

– sallangmentes (a koherens kockázati mértéknél definiált értelemben),

– additív allokáció.[24]

[23] „Lloyd Shapley háborús hős volt. 1943-ben sorozták be. Tiszti kinevezését visszautasította. Ugyanabban az évben kitüntetést kapott, mert megfejtette a japán időjáráskódot. 1945-ben visszatért a Harvardra, ahol még besorozása előtt matematikai tanulmányokat folytatott, és 1948-ban egyetemi diplomát szerzett matematikából. Amikor Shapley feltűnt Princetonban, Neumann már úgy gondolt rá, mint a játékelméleti kutatások egyik legragyogóbb fiatal csillagára. Shapley, miután lediplomázott egy évet töltött a RAND Corporationnél, annál a Santa Monica-i kutatócsoportnál, amely a játékelméletet katonai kérdések megoldására próbálta alkalmazni."(*Nasar* [2002] 125. o.)

[24] A bizonyítást lásd *Solymosi* [2002].

11. táblázat
Három részleg eredőjeként adódó összetett opciós pozíció vizsgálata – 2.

	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}	Letéti követelmény	Shapley	Aumann–Shapley
C_{P1}	–1	0	6	–6	1	20	15	20
C_{P2}	0	–2	2	0	0	20	20	20
C_{P3}	0	0	0	–1	1	10	5	0
Összesen	–1	–2	8	–7	2	40	40	40

Az első portfólióra például: $15 = [2 \times c(1) + c(1, 2) - c(2) + c(1, 3) - c(3) + 2c(1, 2, 3) - c(2, 3)]/6$.

Forrás: Denault [2001] 24. o.

Vegyünk két játékot, (N, c_1)-et és (N, c_2)-t. Ekkor $\Phi(N, c_1 + c_2) = \Phi(N, c_1) + \Phi(N, c_1)$.[25] Ez az egyik gyakran emlegetett hibája a Shapley-értéknek. A játékosokat függetlenül értékeli, nem veszi figyelembe a különböző szituációk közötti esetleges kölcsönhatásokat.

Felmerül a kérdés, hogy koherens allokációs elv-e a Shapley-érték szerinti allokáció. A Shapley-érték axiomatikus meghatározása között szerepel a szimmetria. A kockázatmentes portfólió hozzájárulása a kockázathoz mindig 0, így ennek a Shapley-érték által meghatározott letéti követelménye 0. A koherencia utolsó két feltétele tehát automatikusan teljesül. Már csak az a kérdés, hogy blokkolható-e (magbeli-e) a Shapley-érték. Általában nem, ugyanis ha az opciós portfóliónak egy másik hármas felbontását vesszük, akkor a *12. táblázatbeli* Shapley-értéket kapjuk.

12. táblázat
a) A Shapley-érték

	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}	Letét	Shapley
C_{P1}	–1	–1	4	–2	0	30	26,66
C_{P2}	0	–1	4	–3	0	10	**6,66**
C_{P3}	0	0	0	–2	2	20	**6,66**
Összesen	–1	–2	8	–7	2	40	40

b) A koalíciós függvény

$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$	$c(1, 2)$	$c(1, 3)$	$c(2, 3)$	$c(1, 2, 3)$
30	10	20	40	30	**10**	40

Forrás: Denault [2001] 25. o.

A *12. táblázat b)* részéből látható, hogy a második és a harmadik szervezeti egység együttes maximális vesztesége 10, a Shapley-érték viszont 13,33-at ró rájuk összesen [*a)* rész].

Ahhoz, hogy a Shapley-érték a magban legyen, extrafeltételeket kell megkövetelnünk a koalíciós függvénytől, amelyet így speciális kockázati mérőszám generál. A Shapley-érték nem blokkolható, ha a koalíciós függvény konkáv (erősen szubadditív).[26] Belátható, hogy ilyenkor viszont a kockázati mérőszám lineáris, nincs diverzifikációs hatás.

[25] Az $(N, c_1 + c_2)$ játék koalíciós függvénye $(c_1 + c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S)$ módon adódik.
[26] Vannak még elégséges feltételek (például „átlagos" konkavitás), de ezek ellenőrzése igen nehézkes.

Láttuk, hogy a Shapley-érték nem koherens allokációs elv, mert nem mindig magbeli. A játékelméleti irodalomban természetesen megjelentek új egypontos megközelítések.[27] Ezeknek a módszereknek a részletes bemutatása túlmutat a tanulmány keretein, a nukleolusz viszont érdekes. A nukleolusz lényege az, hogy az egyes koalíciókra háruló többletek (allokált tőke mínusz a koalíció letéti követelménye) vektorát minimalizáljuk.[28] Belátható, hogy a *12. táblázat* példájában a nukleolusz szerinti letételosztás: 30, 10, 0. Ez a vektor mindig magbeli,[29] teljesül a szimmetrikusság és a kockázatmentes allokáció követelménye is, így *a nukleolusz* szerinti elosztás *mindig koherens tőkeallokációs elv.*[30]

A játékelmélet általánosítása

Van a játékelméletnek olyan általánosítása, ahol a játékosok tört része formálhat koalíciókat (*Denault* [2001]). Nem atomi játékosok vannak, hanem egy részük az egyik, másik részük egy másik koalícióban lehet jelen. Ez, ha játékosok személyek, akkor elég furán hangzik, de ha portfóliókról van szó, akkor már nem olyan megütközést keltő.

Az osztható játékosok halmaza legyen *N,* a játékosok száma *n.* Teljes közreműködésük (vagyis atomi nagyságuk volumene, például üzleti értékük) Λ, amely egy *n* dimenziós vektor. Ennek elemeit legegyszerűbb 100 százaléknak tekinteni.

Az általánosított koalíciós függvény, *r* értéke egy λ társuláson a következő:

$$r(\lambda) = \rho\left(\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i}{\Lambda_i} X_i\right).$$

Az $r(\lambda)$ kiszámítása úgy történhet, ha opciós példánkban veszünk egy olyan koalíciót, amely 10 százalék első szervezeti egységből, 20 százalék másodikból és 30 százalék harmadikból áll.[31] Ha a portfóliók opcióit a megfelelő százalékokkal súlyozva összeadjuk, és így kiszámítjuk a maximális veszteséget, akkor megkapjuk a koalíció letéti követelményét, a koalíciós függvény értékét. A koherens kockázati mérték és a koherens allokációs elv követelményei némi módosítással (általánosítással) itt is megadhatók (*Denault* [2001] 12–13. o.).

Denault [2001] belátja, hogy ha $r(\lambda)$ koherens és differenciálható,[32] akkor az *egyetlen (lineáris!) koherens* általánosított játékelméleti *tőkeallokáció* az Aumann–Shapley-érték, amelynek *i*-edik komponense:

$$\phi_i^{AS}(N, \Lambda, r) = k_i^{AS} = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(\gamma \Lambda) dy.$$

Az *i*-edik játékosra háruló letéti követelmény a kockázati mérték közreműködés (súlyok) szerinti parciális deriváltjának súlyozott átlagával egyenlő. Fokozatosan, egyenlő

[27] Csak felsorolásszerűen *az allokációs lehetőségek*: Shapley-érték, egyenlő elosztás, nukleolusz, Tao-érték, az eddigiek súlyozott változatai.

[28] Komponensenként lexikografikusan minimalizáljuk a többletvektort: amelyik koalícióra a legnagyobb teher hárul, azt hozzuk jobb helyzetbe először, majd megyünk tovább a második legrosszabb helyzetűre stb. (vö. Rawls-elv).

[29] Ha létezik a mag, koherens kockázati mérték esetén mindig létezik.

[30] Sajnos egy gond van vele: ha csak annyi változik, hogy a nagykoalíció költsége csökken, akkor is előfordulhat, hogy bizonyos koalíciók letéti követelménye nő. Sérül az aggregált monotonitási tulajdonság, amelyet *Denault* [2001] nem vett fel a koherens allokációs elv követelményei közé. Nem is csoda, mivel belátható, hogy egy egypontos megoldás nem lehet egyszerre magbeli és aggregált monoton.

[31] Itt a λ_i/Λ_i kifejezés rendre 0,1 0,2 0,3.

[32] Belátható, hogy $r(\lambda)$ épp akkor koherens, amikor ρ. *Fischer* [2003] differenciálható koherens mértékek kombinációjával előállítja a nem differenciálható VaR-t, így már lehetséges a gradiensalapú tőkeallokáció a VaR-ra is.

arányban növeljük minden játékos jelenlétét (a portfóliók súlyát) a nagykoalícióban ($\gamma\Lambda$), és ez alapján átlagoljuk a kockázathoz való hozzájárulásukat. Mivel r koherens, így első fokon homogén, parciális deriváltja pedig nulladfokon homogén,[33] vagyis konstans. Bárhol számítjuk is ki az Aumann–Shapley-értéket, ugyanannyit kapunk, ezért nem kell átlagolni. Vegyük a teljes közreműködésnél, Λ helyen – így az Aumann-Shapley-féle elosztásvektor r *gradiens*ével egyenlő a Λ helyen.

$$\phi^{AS}(N,\Lambda,r) = k^{AS} = \nabla r(\Lambda).$$

Akkor osztjuk el következetesen a költségeket, ha ezt a kockázathoz való határ-hozzájárulás (határkockázat) alapján tesszük.

Térjünk vissza az összetett opciós számpéldához! Definiáljunk egy **L** lineáris operátort (mátrixot),[34] amely a részlegek λ_i/Λ_i százalékos súlyához hozzárendeli az együttes opciók számát. Ha minden szervezeti egység 100 százalékban van jelen, akkor visszakapjuk az eredeti $\mathbf{C_P}$ vektort: $\mathbf{Le}=\mathbf{C_P}$, ahol **e** az egységmátrix.

Innen már egyszerűen adódik az Aumann–Shapley-érték kiszámítása:

$$\mathbf{f^t Y^*} = -(\mathbf{\ddot{a}^*})^\mathbf{t}\mathbf{C_P} = [-(\mathbf{\ddot{a}^*})^\mathbf{t}\mathbf{L}]\mathbf{e}.$$

A fenti egyenlőségsorozat első része a SEC–LP-re felírt dualitási tétel miatt igaz, a második rész pedig az $\mathbf{Le}=\mathbf{C_P}$ behelyettesítésből következik. Ha parciálisan deriváljuk a kockázatot kifejező letéti követelményt a közreműködés (súlyok) szerint, és kiszámítjuk a gradienst a teljes közreműködésnél (**e**), akkor $-(\mathbf{\ddot{a}^*})^\mathbf{t}\mathbf{L}$ adja meg az Aumann–Shapley-értéket. Az optimális duális megoldás, $(\mathbf{\ddot{a}^*})^\mathbf{t} = (20, 10, 0, 0, 0)$. Ez azt jelenti, hogy a következetes elosztás az, ha a szervezeti egység első típusú opciójának (a 10-es kötési árfolyamúnak) a darabszámát –20-szal, a másodikét –10-zel szorozzuk, majd az eredmény összeadjuk. Így kaptuk meg az 11. és a 13. táblázat utolsó oszlopát.

13. táblázat

Az Aumann–Shapley-érték és az $\mathbf{L^t}$ mátrix

	C_{10}	C_{20}	C_{30}	C_{40}	C_{50}	Letéti követelmény	Shapley	Aumann–Shapley
C_{P1}	–1	–1	4	–2	0	30	26,66	30
C_{P2}	0	–1	4	–3	0	10	6,66	10
C_{P3}	0	0	0	–2	2	20	6,66	0
Összesen	–1	–2	8	–7	2	40	40	40

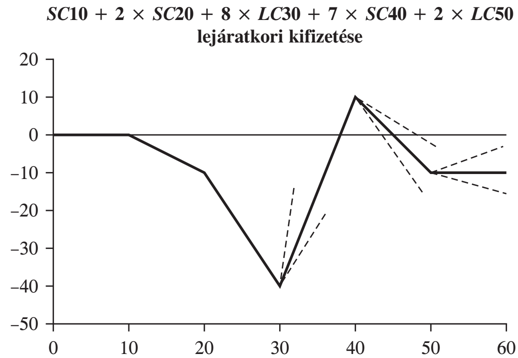
Forrás: Denault [2001] 25. o.

A duális változó – az opciók árnyékárainak ellentettje – tehát a következetes kockázatelosztásban is használható. Ilyenkor a kockázat a határon értékelt, az opciók utolsó kis egységének kockázatából ered. Csak a 10-es és a 20-as kötési árfolyamú opció határkockázata a mérvadó, a többi opció (30, 40, 50-es kötési árfolyamú) mennyiségének *kis* változtatása nem befolyásolja a maximális veszteséget, a 30-as alaptermék árfolyamnál jelentkező 40-es értéket *(6. ábra)*.

[33] Ismert, hogy N-ed fokon homogén függvény deriváltja $(N-1)$-ed fokon homogén.

[34] A 11. és a 13. táblázatban bekeretezve láthatunk $\mathbf{L^t}$ mátrixokat.

6. ábra
A 30-as, 40-es, 50-es kötési árfolyamú opciók mennyiségének kis változása



Észrevételek

Az oszhatatlan (atomi) játékost feltételező megközelítés Shapley-értéke és a nem atomi (fuzzy) játék Aumann–Shapley-értéke jól láthatóan nem adott azonos eredményt a letétallokációra. A két módszer között elvi különbségek vannak: az előbbi méltányos várható határ-hozzájárulás az utóbbi határértékelés alapon kalkulál.

A *13. táblázatban* az Aumann–Shapley-érték nem blokkolható (és egybeesik a nukleolusszal):[35] például a második és a harmadik játékos együttes letéti követelménye 10 (amelyet a második fizet).

Előfordulhatnak kockázatmentesnek tulajdonított portfóliók (a 3. részleg nem vett az első két kötési árfolyamú opcióból, így kockázatmentes), amelyek RARORAC[36] számításnál a nullával való osztás problémáját vetik fel.

A kooperatív játékelméleti eszközöket felhasználva (*Denault* [2001]), eljutottunk a gradiens alapú tőkeallokációig, amikor a kockázati mérőszámot a portfóliósúlyok szerint parciálisan deriválva, tetszőleges helyen értékelve (például a teljes közreműködésnél), megkapjuk a kockázathoz felbontását, a helyes tőkeallokációt. Más kiindulópontból ugyanerre az eredményre jutott *Tasche* [1999].

Euler-elvnek is nevezik ezt gradiens alapú tőkeallokációt. Ha F valós, n-változós, k-ad fokon homogén függvény, akkor az Euler- tétel:

$$x_1 \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} = kF(x).$$

$F(x)$-nek a kockázati mérőszámot véve és $k = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a teljes kockázat, $F(x)$ felosztható az szervezeti egységek (és egy lineáris operátoron keresztül az opciók) határkockázata szerint.

A VaR-ra alkalmazva a gradiens alapú kockázatelosztást megkapjuk a növekményi VaR-t (*Jorion* [1999]), amely a VaR nem koherens volta miatt nem felel meg a következetes tőkeallokáció követelményeinek.

A feltételes VaR-ról láttuk, hogy koherens kockázati mérték, vajon nehéz kiszámítani,

[35] Mert a mag egyelemű. Bővebb mag esetén az egybeesés kérdéses.

[36] *Return on Risk Adjusted Capital* vagy *Risk Adjusted Return on Capital* = a kockázattal korrigált hozam/gazdasági tőke.

értelmezni a gradiensét? Szerencsére nem. *Tasche* [1999] megmutatta, hogy a feltételes VaR bizonyos (gyenge) feltételek mellett differenciálható. Ekkor az Aumann–Shapley-érték [*Denault* [2001] 18. o., a feltételes VaR-ból származó koalíciós függvény r(CVaR)]:

$$\phi_i^{AS}(N,\Lambda,r(CVaR)) = k_i^{AS} = \mathbf{E}\left[\mathbf{X_i} \mid \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{X_i} > \mathbf{VaR_{\tilde{a}}}\left(\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{X_i}\right)\right].$$

Az Aumann–Shapley-érték is feltételes VaR-típusú: egy X_i eszköz (alportfólió) hozzájárulása a kockázathoz feltételes várható értékével egyenlő, ha a teljes kockázat túllépi a VaR-küszöböt. Az intuitív és koherens kockázatfelosztás – kedvezőtlen esemény esetén –: az alportfóliókra allokálandó tőke azok átlagos veszteségével egyenlő.

*

A kockáztatott érték (VaR) egy portfólió veszteségeloszlásának egyoldalú konfidenciaintervalluma, adott időtávon és megbízhatósági szinten, normális üzletmenetet feltételezve. Az ilyen mérőszámok iránti első érdeklődés egészen *Edgeworth* [1888] cikkéig vezethető vissza. *Baumol* [1963] javasolt VaR-hoz hasonló (de nem így nevezett) kockázati mértéket portfóliókiválasztási problémákban, de a tanulmány visszhang nélkül maradt. Csak az 1990-es években vált népszerűvé mind a gyakorlatban, mind az elméletben a J. P. Morgan által 1994 októberében a RiskMetrics™-ben bevezetett VaR. A szabályozók is nagyon támogatták használatát, a szóráshoz képest nagy előrelépésnek tartották.

A hatalmas népszerűség természetesen megmozgatta a kutatókat is, akik számára alaposabb szemrevételezés után feltűnt, hogy a VaR nem veszi figyelembe a nagy veszteségek bekövetkezésének valószínűségét. Ha a veszteségek eloszlása vastag farkú, akkor a VaR-köszöb átlépése esetén jóval nagyobb kár érhet bennünket. Erre azzal védekeztek, hogy a VaR egy mindent vagy semmit kockázati mérőszám: ha az extrém esemény bekövetkezik, nincs az a tőke, ami kivédhetné a veszteségeket. *Artzner és szerzőtársai* [1999] továbblép, és a koherens kockázati mértékek definiálásával a szubadditivitásra hívja fel a figyelmet: nem biztos, hogy alportfóliók egyesítésekor keletkezik diverzifikációs hatás, ha VaR-ban mérjük a kockázatot. Csak szubadditív kockázatmérési eszköz esetén van értelme limitek alkalmazásának, ekkor lehetünk biztosak abban, hogy a globális kockázatot sikerül a limitek összege alatt tartani. Megjelentek tehát a koherens kockázati mértékek, amelyek a reprezentációs tétel szerint különböző általánosított forgatókönyvek közül a legrosszabban bekövetkező veszteséget mérik. A maximális veszteség és a feltételes várható érték koherens, ráadásul *mindkettő* lineárisan programozható, ha optimalizálni akarunk. A szakirodalom a kockáztatott érték további hátrányait és előnyeit is megemlíti, ezeket a koherens kockázati mértékek tulajdonságaival vetettük össze.

A tőzsdék tudomásunk szerint sehol sem használnak VaR-t, a biztosítókat pedig *Meyers* [2000] próbálja rávenni arra, hogy térjenek át koherens mérőszámokra. Mindezek ellenére a bankok bázeli szabályozásában a VaR tovább „él és virul”. A végső mentsvárat adó szabályozók legfőbb érve a normális eloszlás, ezzel a feltevéssel minden „szép és jó” lesz, még az úgynevezett kaszinóhatással sem kell számolni.

Az alkalmazási területek közül a tőzsdét, azon belül opciós letéti követelmények meghatározását vizsgáltuk részletesebben, de a következtetések természetesen mindenféle kockázatmérésre igazak. A modellfüggő SPAN módszer és a modellmentes SEC követelmény mögött a maximális veszteség húzódik meg, és egymás matematikai duálisának tekinthetők bizonyos feltételek teljesülése esetén. A feltevések közül a legfontosabb a pillangók használhatósága a SEC-nek bejelentett eredetivel ekvivalens opciós pozícióban.

Csak szubadditív kockázati mértékek esetén jelentkezik diverzifikációs hatás, amelynek az elosztása a tőkeallokáció, azaz a kockázat felbontása. Ezt az eljárást kooperatív játékelméleti eszközökkel modelleztük.

A konkrét allokációs módszerek közül a Shapley-érték mellett (amely például jól használható a parlamenti pártok tényleges szavazati erejének tükrözésére) egy általánosabb koncepciót, az Aumann–Shapley-értéket mutattuk be részletesebben. Ígéretes a nukleolusz alkalmazása is. Bizonyos feltételek mellett az egyetlen koherens tőkeallokációs elv az Aumann–Shapley-érték, amely a kockázati mérőszám eszközsúlyok szerinti gradiensével egyenlő, tetszőleges helyen. E szemlélet szerint a határkockázat, a súlyok kis módosulása határozza meg az allokálandó tőkét. A gradiens alapú elosztás természetesen csak érintőközelítés, ha nagyobb mértékben megváltoznak a pozíciók, akkor jelentősen átértékelődhet a kockázathoz való hozzájárulás.

További vizsgálati irányok

Egy továbblépés lehet annak tanulmányozása, hogy van-e jótékony hatása a kockázatok ilyen formában (például VaR) történő szabályozásának, vagy kifejezetten károsak. Egyáltalán kell-e szabályozni a pénzügyi szektort? A liberális válasz szerint nem kell, ugyanis ha globális kedvezőtlen esemény történik (például háború, *válság*), akkor a gazdasági szereplők önszabályozó módon maguktól is kivédhetik a kockázatok tovaterjedését.

A kockázatok mérése a nagy veszteségek megelőzésére hivatott. A legtöbb jelenleg létező kockázati modell azonban rosszul viselkedik válságok idején, mivel a piaci árak sztochasztikus folyamata endogén módon függ a piaci szereplők cselekedeteitől. A kockázatok modellezése nagyban különbözik az időjárás előrejelzésétől. A meteorológus cselekedete nem hat az időjárásra, de ha a pénzügyi kockázatokat modellezve beavatkozunk, akkor megváltozik a folyamat dinamikája, mivel cselekedetünk hat a kockázatokra (vö. Lucas-kritika).

Örök téma a normális eloszlás feltevésének realitása, és számos cikk foglalkozik a VaR-limitek melletti hozammaximalizálás modellezésével, valamint a gradiens alapú kockázatfelbontással is.

Mindent összevetve, azt állítjuk, hogy a kockázati mérőszámok közüli választás általában komplex feladat, de legtöbbször van lehetőség koherens kockázatmérésre és tőkeallokációra. Egyébként a portfólió beható vizsgálata sokszor hasznosabb, mint valamilyen kockázati számérték kalkulálása, amelyet egy gombnyomásra megkaphatunk.

Hivatkozások

Albanese, C. [1997]: Credit Exposure, Diversification Risk and Coherent VaR. Working Paper, Department of Mathematics, University of Toronto, szeptember.

Artzner, Ph.–Delbaen, F.–Eber, J.-M.–Heath, D. [1999]: Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance, Vol. 9. No. 3. 203–228. o.

Baumol, W. J. [1963]: An Expected Gain-confidence Limit Criterion for Portfolio Selection. Management Science, 10. 174–182. o.

Daníelsson J. [2001]: The Emperor has no Clothes: Limits to Risk Modelling. www.RiskResearch.org, szeptember.

Denault, M. [2001]: Coherent allocation of risk capital. Journal of Risk, Vol. 4. No. 1.

Edgeworth, F. Y. [1888]: The Mathematical Theory of Banking. Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 51. No. 1. március, 113–127. o.

Fischer, T. [2003]: Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. Insurance: Mathematics and Economics, 32. 135–146. o.

Jorion, P. [1999]: Kockáztatott érték. Panem, Budapest.

Kondor Imre [2003]: Tőzsdei árfolyamok és opciók árazása. Órai jegyzet, kézirat.

Merton, R. [1973]: Theory of Rational Option Pricing Bell Journal of Economics and Management Science, No. 4. 141–183. o.

Meyers, G. [2000]:Coherent Measures of Risk (An Exposition for the Lay Actuary). http://www.gloriamundi.org/picsresources/gmcmr.pdf.

Nasar, S. [2002]: Egy csodálatos elme (A Nobel-díjas matematikus géniusz, John Nash élete), GABO Könyvkiadó.

Pearson, N. D.–Smithson, Ch.S. [2002]: VaR The state of play. Review of Financial Economics 11. 175–189. o.

Solymosi Tamás [2002]: Kooperatív döntési helyzetek. Órai jegyzet, kézirat.

Száz János [1999]: Tőzsdei opciók. Tanszék Kft., Budapest.

Szép Jenő–Forgó Ferenc [1974]: Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Tasche, D. [1999]: Risk contributions and performance measurement. Report of the Lehrstuhl für mathematische Statistik, T.U. München www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/Papers/Tasche/riskcon.pdf.

Walter György [2002]: VaR-limitrendszer melletti hozammaximalizálás: a kaszinóhatás. Közgazdasági Szemle, 3. sz. 212–234. o.