Közgazdasági Szemle, XLII. évf., 1995. 12. sz. (1118-1135. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Simonovits András az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos tanácsadója.

Még egyszer az optimális növekedésrõl

Ebben a cikkben a véges idõhorizontú optimális növekedés kérdésével foglalkozunk. A kiinduló pont Harrod és Domar állandó tõke/termelési hányadú modellje, de a beruházási hányad az elemzési idõszakban bizonyos korlátok között folytonosan változhat. Föltesszük, hogy a maximalizálandó célfüggvény a pillanatnyi hasznosságfüggvény diszkontált integrálja, valamint a pillanatnyi hasznosságfüggvény a pillanatnyi fogyasztás növekvõ és szigorúan konkáv függvénye. A cikk újítása, hogy a fogyasztás *idõben állandó, rugalmatlan* idõbeli helyettesíthetõségét feltételezi. Ez a feltevés nemcsak a valósághoz közelít, de megszabadít azoktól a paradoxonoktól, amelyek elkeserítették TINBERGENT [1960]. Kiderül az is, hogy a fogyasztás tökéletes idõbeli helyettesíthetõségén alapuló SHELL [1967], VIRÁG [1969], TAKAYAMA [1974], KOVÁCS-VIRÁG [1981] eredménye az *elõször csak beruházni, utána csak fogyasztani* stratégia optimalitásáról, közgazdaságilag helytelen.

A matematikai közgazdaságtan egyik alapkérdése RAMSEY [1928] óta az optimális növekedési pályára vonatkozott. Az optimális növekedéselmélet alapfogalmai a következõk: a célfüggvény (a pillanatnyi hasznosságfüggvény diszkontált idõintegrálja), a termelési függvény, a peremfeltételek (a kezdeti és a záró tõkeállomány) és az idõben változó beruházási (megtakarítási) hányad. Megfelelõ feltételek mellett a variációszámítás (vagy az azt általánosító optimális folyamatok elmélete) segítségével levezethetõ az *optimális* megtakarítási hányad, beruházási és fogyasztási pálya. A lehetõ legegyszerûbb modell segítségével a cikkben azt vizsgáljuk: mi az összefüggés a pillanatnyi hasznosság leszámítolási rátája, a záró tõkefeltétel, valamint az optimális fogyasztási és beruházási pálya között.

Mielõtt az eredmények ismertetésébe fognánk, röviden áttekintjük a szerteágazó irodalom néhány jellegzetes darabját. Részletesen TAKAYAMA [1974], 5. és 8. fejezet, KAMIEN-SCHWARTZ [1981] I. rész, 17. fejezet, valamint BLANCHARD-FISCHER [1989, 2. fejezet] tankönyve tartalmazza a tudnivalókat. A legmodernebb eredményeket BOLDRIN-MONTRUCCHIO [1986], valamint BOLDRIN-WOODFORD [1990] tartalmazza.

Kizárólag makromodellekkel foglalkozunk. Az *1. táblázatban* három feltevés szerint osztályoztuk a modelleket: *1.* a vizsgálat idõhorizontja véges vagy végtelen; *2.* a termelési függvény lineáris vagy konkáv; *3.* a pillanatnyi hasznosságfüggvény lineáris vagy konkáv, s ez utóbbin belül gyengén vagy erõsen konkáv (magyarázat késõbb).

1. táblázat

Modellek és feltevések

Modellek	Időhorizont	Termelési függvény	Hasznosság
Tinbergen [1960]	véges	lineáris	gyengén konkáv
Cass [1965]			
Koopmans [1965]	végtelen	nem lineáris	erősen konkáv
Shell [1967]	véges	nem lineáris	lineáris
Virág [1969]			
Kovács–Virág [1981]		lineáris	lineáris
Banai–Lukács [1987]	véges	ad hoc	lineáris
Simonovits	véges	lineáris	erősen konkáv

Megjegyzés: A termelési függvény linearitása azonos az állandó termelés/tőke hányadossal. A fogyasztási függvény linearitása azonos a tökéletes időbeli helyettesíthetőséggel (kockázatsemlegesség), gyenge/erős konkavitása a rugalmas/rugalmatlan helyettesíthetőséggel.

Ismert, hogy a közgazdasági modellek sokkal durvábban tükrözik a valóságot, mint például a fizika. Ez a tény egyeseket arra sarkall, hogy minél általánosabb és realistább feltevések mellett oldják meg a feladatot. Mások viszont szinte felszabadulnak, és azt hiszik, azt tehetik föl, amit akarnak. Ez a kettõsség az optimális növekedés hazai és nemzetközi mûvelõinél is megmutatkozik.

A véges vagy végtelen idõhorizont választása módszertani jellegû, mindkét megoldásnak megvan az erõs és a gyenge oldala. Mi a továbbiakban a *véges idõhorizontú* modellekre szorítkozunk, és csak utalunk a végtelen idõhorizontú modellekre (CASS [1965] és KOOPMANS [1965]).

Ismert, hogy a leíró (nem optimalizáló) növekedési modellek kezdetben *lineáris* termelési függvényt tételeztek föl: HARROD [1939] és DOMAR [1946] modelljében a termelés a tõkével egyenesen arányos. Ismert, hogy az ilyen modellekben az egyensúly késélen táncol. SOLOW [1956] bevezette a neoklasszikus konkáv termelési függvényt, ahol az egyensúlyi pálya stabil, azonban a fejlõdés korlátozott. A technikai haladás bevezetésével (SOLOW [1957]) a korlátlan növekedés ismét lehetõvé vált.

A hatvanas évek elejétõl kezdve a statikus modellekben már megszokott optimalizálás átterjedt a dinamikus modellekre is. Az úttörõ TINBERGEN [1960] a matematikai kezelhetõség kedvéért az állandó idõbeli helyettesítési rugalmasságú hasznossági függvényekre szorítkozott.

Mindenekelõtt értelmezzük a fogyasztás *helyettesítési határrátáját és helyettesítési rugalmasságát*. Adott hasznosságú fogyasztási pályákat mérlegelve, a helyettesítési határráta azt fejezi ki, hogy mennyivel kell csökkenteni az egyik idõpontban a fogyasztást, ha egy másik idõpontban egységnyivel növeljük. Hicks bevezette a helyettesítési rugalmasságot mint a helyettesítési határrátának a két fogyasztás hányada szerinti rugalmasságát. Feltevésünk szerint a második mutató kisebb, mint 1: a fogyasztás *idõbeli helyettesítése rugalmatlan.*

Frisch 1931es megfigyelésére hivatkozva, Tinbergen rugalmas helyettesítést tételezett föl (gyenge konkavitás). A továbbiak miatt érdekes, hogy bevezette a létfenntartási minimumot, amely alá a fogyasztás sohasem süllyedhet. Igazi közgazdászhoz méltóan végigelemezte az optimális megoldás nagyságrendjét, és elégedetlenül tette félre az eredményeket.

Rugalmasabbnak tûnik CASS [1965] és KOOPMANS [1965] feltételezése, ti. a fogyasztás határhaszna a -∞hez tart, ha a fogyasztás nullához tart: erõs konkavitás. Mint a táblázatból látható, az említett szerzõk konkáv termelési függvénnyel és végtelen idõszakkal dolgoztak.

Mások kevésbé törõdtek a hasznosságfüggvények megválasztásával. Számomra meglepõ módon az optimális növekedéselmélet egyik klasszikusa, SHELL [1967] cikkében lineáris hasznosságfüggvénnyel dolgozott. A nem sokkal korábban született optimális folyamatok elméletét (PONTRJÁGIN ÉS SZERZÕTÁRSAI [1961]) alkalmazva a következõ eredményt kapta: az elemzési idõszak elsõ szakaszában érdemes maximálisan, a másodikban viszont minimálisan beruházni. Még azt a fáradságot sem vette magának, hogy a beruházási hányadot az elvileg lehetséges [0,1] intervallumnál szûkebbre, például [0,05; 0,4]re szabja. Talán azért választotta a lineáris célfüggvényt, mert éppen ez az az eset, amikor a klasszikus variációszámítás már nem érvényes? A makrohasznossági függvény linearitása azonban még elsõ közelítésként sem engedhetõ meg. (Kenyeret, energiát és más árukat-szolgáltatásokat mindennap fogyasztanunk kell!) Korábban hasonló hasznosságfüggvényt alkalmazott SRINIVASAN [1964] és UZAWA [1964], igaz, kétszektoros modellben.

S ezzel elérkeztünk Magyarországra. A magyar szakirodalomban VIRÁG [1969], KOVÁCS-VIRÁG [1981], valamint BANAI-LUKÁCS [1987] foglalkoztak az optimális növekedés kérdésével. Mindhárom forrás az irreális lineáris hasznosságfüggvénnyel dolgozott, s ezért közömbös, hogy lineáris, konkáv termelési függvényt vagy más, érdekes termelési szabályt tételezett föl. VIRÁG [1969] és KOVÁCS-VIRÁG [1981] SHELL [1967]hez hasonló eredményt kapott; BANAI-LUKÁCS [1987] általánosabb eredményekhez is eljutott.

Ebben a cikkben Tinbergen és Koopmans gondolatait ötvözöm. Tinbergentõl átveszem a véges idõhorizontot, az állandó tõke/termelési hányadost és az állandó rugalmasságú hasznosságfüggvényt, Koopmanstól viszont a helyettesítési rugalmatlanságot.

Elõször a modellt ismertetem, majd az optimális megoldást. A nehézségek miatt az optimalizálást két lépésben mutatom be: az általános variációszámítási feladat keretében, illetve a Tinbergen-féle speciális feladatnál, de most erõs konkavitást feltételezve. A bonyolultabb tételeket és levezetéseket, amelyekre a közgazdasági mondanivaló megértéséhez nincs szükség, a függelék tartalmazza. A cikk fõ eredménye: ésszerûen korlátozva a tõkeállomány növekedését, a leszámítolási lábat (diszkontrátát) és a fogyasztás idõbeli helyettesítési rugalmasságát, a közkeletû elképzelésnek megfelelõ sima fogyasztási pályát kapunk.

A modell alapján - kellõ óvatossággal -, a következõ megállapítások tehetõk a növekedéspolitikával kapcsolatban. *1.* Ha sikerül csökkenteni a döntéshozók rövidlátóságát (melyet a modellben a leszámítolási láb fejezi ki), akkor a kezdeti fogyasztás csökkentése árán jelentõsen növelhetõ a fogyasztás növekedési üteme. *2.* Ha sikerül csökkenteni a jelenrõl a jövõre halasztott terheket (ezt a modellben a záró tõkeállomány emelése fejezi ki), akkor az optimális beruházási hányad idõbeli csökkenése mérsékelhetõ, illetve növekedésbe fordítható. Számpéldák és ábrák mutatják a különbözõ gazdaságpolitikai változatok kvalitatív és kvantitatív eredményeit. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a különbözõ optimális pályák összehasonlítására nincs matematikai módszer, továbbra is pusztán a józan eszünkre kell hagyatkoznunk.

A modell

A neoklasszikus elméletben a következõ *változók*ra lesz szükség: az egy fõre jutó társadalmi termék = y; az egy fõre jutó beruházás = i; az egy fõre jutó fogyasztás = c; az egy fõre jutó tõke = k, idõ = t, amely 0 és T között fut. Föltesszük, hogy a gazdaság zárt. (Ha *nyitott* gazdaságot vizsgálunk, akkor a külsõ adósságot le kell vonni a gazdaság tõkeállományából!)

Általános modell

Tekintsük elõször az általános modellt!

Termelési függvény

$$y(t) = f[k(t)],\ f' > 0 \text{ és } f'' \leq 0. \tag{1}$$

Beruházási függvény

$$i(t) = s(t)y(t),\ 0 \leq s(t) \leq 1, \tag{2}$$

ahol *s(t)* a pillanatnyi beruházási hányad, amely értelemszerûen 0 és 1 közé esik. (A valóságban sokkal szûkebb korlátok között kell maradnia, például 0,05 és 0,4 között.)

Fogyasztási függvény

$$c(t) = y(t) - i(t) = [1 - s(t)]\, y(t). \tag{3}$$

Tõkebõvítési függvény

$$k'(t) = i(t), \tag{4}$$

ahol ' az idõszerinti derivált jele.

Célfüggvény

$$F[s] = \int_0^t e^{-\theta t}\, U[c(t)]dt. \qquad \theta > 0,\ U' > 0,\ U'' < 0, \tag{5}$$

ahol *U* a *pillanatnyi hasznossági függvény*; növekvõ, szigorúan konkáv és sima függvény; Θ *a leszámítolási láb.*

Peremfeltételek

$$k(0) = k_0 \text{ és } k(T) = k_T. \tag{6}$$

Speciális modell

Az általános modell megoldása eléggé bonyolult, ezért szükségünk lesz egy speciális modellre is, amelyben mind a pillanatnyi hasznosság fogyasztás szerinti rugalmassága (Σ), mind a tõke/termelés hányados *állandó*:

$$U(c) = \sigma^{-1} c^{\sigma}, \text{ ha } \sigma \neq 0, -\infty; \tag{7}$$

és

$$f(k) = Ak,\ A > 0, \tag{8}$$

ahol *A* a tõke/termelés hányados reciproka, röviden: tõkefajlagos.

Szükségünk lesz a fogyasztás idõbeli helyettesítési rugalmatlanságát mutató értékre, amely idõben additív hasznosságfüggvény esetén egybeesik a *relatív kockázatkerülési együtthatóval:*

$$\varepsilon(c) = -\frac{cU''(c)}{U'(c)}. \tag{9}$$

Figyeljük meg, hogy (7) esetén $U'(c) = c^{\sigma-1}$, $U''(c) = (\sigma - 1)c^{\sigma-2}$, azaz $\varepsilon(c) = 1 - \sigma$. A továbbiakban az $\varepsilon(c) = \varepsilon$ jelölést alkalmazzuk.

Ujjgyakorlatként fölírjuk az állandó beruházási hányadhoz tartozó növekedési ütemet, amely a tõkefajlagos és a beruházási hányad szorzata:

$$\tau = As. \quad (10)$$

Az optimális megoldás

Az optimális pálya meghatározása

Az éppen 300 éves születésnapját ünneplõ variációszámítás segítségével az optimális növekedési pályára egy bonyolult differenciálegyenletrendszer adódik (lásd Függelék, *F7-F8.* egyenletek), amelynek általában nincs zárt alakú megoldása. Az általunk tanulmányozott speciális esetben azonban egy síkbeli lineáris differenciálegyenletrendszert kapunk, állandó együtthatómátrixa reducibilis: (*F9*)-(*F10*). Ezért az egyenletek megoldása különlegesen egyszerû:

1. tétel. *Feltéve, hogy teljesülnek a mûködõképességi feltételek, az optimális növekedési pálya a következõ:*

$$c(t) = c_0 e^{\tau t}, \quad (11)$$

ahol a fogyasztás növekedési üteme

$$\tau = (A - \theta)/\varepsilon, \quad (12)$$

és a fogyasztás kezdõértéke

$$c_0 = \frac{A - \tau}{e^{AT} - e^{\tau T}} (e^{AT} k_0 - k_T). \quad (13)$$

Megjegyzés. Látható, hogy a k_0 kezdõfeltétel mellett a k_T zárófeltétel is fontos szerepet játszik az optimális pálya meghatározásában. A puristákat ez zavarhatja, s inkább beolvasztják k_Tt az (5) célfüggvénybe:

$$I^*(k) = e^{-\theta T} \Phi(k_T) + \int_0^T e^{-\theta t} U\{f[k(t)] - k'(t)\} dt, \quad (5^*)$$

ahol Φ() valamilyen növekvõ sima függvény. Mi megmaradunk az eredeti variációs feladatnál.

Mûködõképességi feltételek

Eddig nem elemeztük a $0 \le s(t) < 1$ mûködõképességi feltételeket. Az

$$s(t) = 1 - c(t) / [Ak(t)] \quad (14)$$

összefüggés értelmében a *k(t) / c(t)* hányados alakulása a döntõ. Lássuk elõször a tõkeállomány képletét:

$$k(t) = e^{At} k_0 - \frac{e^{At} - e^{\tau t}}{e^{AT} - e^{\tau T}} (e^{AT} k_0 - k_T). \quad (15)$$

A mûködõképesség biztosítására három feltevésre lesz szükségünk:

1. feltétel: A relatív kockázatkerülési együttható nagyobb, mint 1: $\varepsilon > 1$ ($\Sigma < 0$).
2. feltétel: A leszámítolási láb kisebb, mint a termelés/tõkehányados: $\Theta <$ A.
3. feltétel: A záró tõkeállomány nagyobb, mint a kezdõ tõkeállomány; de kisebb, mint a nulla fogyasztással elérhetõ maximális érték. Pontosabban:

$$(0 < k_0 <) \frac{(A-\tau)\, e^{\tau T}}{Ae^{AT} - \tau e^{\tau T}}\, e^{AT} k_0 < k_T < e^{AT} k_0 \;. \qquad (16)$$

Megjegyzés. Aláhúzzuk, hogy k_T (16)beli alsó korlátjától eltekintve, minden feltevésünk természetes. Az *1. feltevés* azt mondja ki, hogy a fogyasztás idõbeli helyettesítése korlátozott, például semmilyen optimális fogyasztási pálya nem tartalmazhat nulla fogyasztási pontot. (Figyelemre méltó, hogy Tinbergen Frisch 1931es adataira hivatkozva éppen az ellenkezõ feltevést mondja ki, és nem tudja elfogadni saját paradox eredményét!) A *2. feltevés* empirikus jellegû: mivel Θ néhány század, *A* pedig néhány tized, $\Theta < A$. A 3. feltevésbeli felsõ korlát nem engedi, hogy a nulla fogyasztás mellett elérhetõ tõkefelhalmozást vagy annál többet tûzzünk ki célul. Az alsó korlát nehezen áttekinthetõ, a bizonyításból származik. A könyebb érthetõség kedvéért megjegyezzük, hogy min k_T értéke k_0 és $k^* = k_0 e^{\tau T}$ közé esik, k^* értéke függ τtól és *T*tõl.

Megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a cikk fõ eredményét:

2. tétel. *Tegyük föl, hogy az 1-3. feltevéshármas teljesül.*

a) Az (1)-(8) speciális felhalmozási feladatnak van megengedett lokális optimuma, amely egyben globális optimum.
b) Az optimális fogyasztás idõben nõ.
c) Minél nagyobb a leszámítolási láb vagy a kockázatkerülés (azaz minél kisebb az idõbeli helyettesítés rugalmassága), annál nagyobb a kezdõfogyasztás és annál kisebb a fogyasztás növekedési üteme.
d) Ha $k_T = k^*$, akkor az optimális beruházási hányad, s(t) állandó. Ha $k_T > k^*$, akkor s (t) nõ; ha $k_T < k^*$, akkor s(t) csökken.

Bizonyítás. *a)* Ha létezik lokális optimum, akkor azt a fenti levezetésbõl következõen a megadott módon kell meghatározni. Igazolni kell viszont a pozitivitási feltételek teljesülését. (14)be be kellene helyettesíteni (11)et és (15)öt, de ez meglehetõsen fáradságos lenne. Ehelyett más, ekvivalens feltételeket vizsgálunk.

c_0 pozitivitása: (13) jobb oldalán a tört mindig pozitív. c_0 pontosan akkor pozitív, ha $k_T < e^{AT}k_0$ teljesül.

k'(t) pozitivitása: Deriváljuk (15)-öt!

$$k'(t) = Ae^{At} k_0 - \frac{(e^{AT} k_0 - k_T)}{e^{AT} - e^{\tau T}} (Ae^{At} - \tau e^{\tau t}).$$

Közös nevezõre hozzuk és összevonjuk a jobb oldalt, majd fölírjuk a *k' (t)* > 0 feltételt. A pozitív nevezõt elhagyva:

$$A(k_T - e^{\tau T}k_0)e^{At} + \tau(e^{AT}k_0 - k_T)e^{\tau t} > 0. \tag{17}$$

Ha elégséges feltétellel beérjük, akkor az első tagot pozitívvá tevő $k_T > e^{\tau T}k_0$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan megteszi, hiszen a második tag $k_T < e^{AT}k_0$ miatt pozitív.

Ha a pontos feltételt keressük, akkor tovább kell számolnunk. (17)-et átrendezve

$$(Ae^{At} - \tau e^{\tau t})k_T > (Ae^{At+\tau T} - \tau e^{AT+\tau t})k_0 > 0,$$

azaz

$$k_T > \frac{Ae^{At+\tau T} - \tau e^{AT+\tau t}}{Ae^{At} - \tau e^{\tau t}}k_0. \tag{18}$$

Jelölje $g(t)$ a k_0 szorzójaként szereplő törtet! $e^{\tau t}$-vel egyszerűsítve:

$$g(t) = \frac{Ae^{(A-\tau)t+\tau T} - \tau e^{AT}}{Ae^{(A-\tau)t} - \tau}.$$

A *g(t)* függvény deriválásával belátható, hogy *g'(t)* > 0, azaz *g(t)* < *g(T)*, ha 0 ≤ *t* < *T*. Tehát (18) teljesülésének szükséges és elégséges feltétele $k_T > g(T)k_0$. A *g(t)* függvény (18)beli alakját használva, a (16)beli alsó korlátot kapjuk.

k(t) pozitivitása: következik a $k_0 > 0$ és a $k'(t) > 0$ egyenlõtlenségpárból.

b) (12) és Θ < A miatt $\tau > 0$.

c) Minél nagyobb ε vagy Θ, annál kisebb τ.

d) Következik a korábbi bizonyításokból.

Numerikus számítások

Az elmondottakat viszonylag egyszerû számpéldákon szemléltetjük. Már Tinbergent is zavarta, hogy nehéz a modellt jól kalibrálni. Két elemi összefüggést tarthatunk szem elõtt: a (10)beli $\tau = sA$ és a (12)beli $\tau = (A - \Theta)/\varepsilon$ képletet. Kiindulásul vegyünk évi 2 százalékos növekedést és 16 százalékos beruházási hányadot: a keletkezõ $A = \tau/s$ = 0,02/0,16 = 0,125 zavaróan alacsony érték! Néhány százalékos diszkontrátával dolgozva a helyettesítési rugalmatlanság meglehetõsen nagynak adódik: például kerek számokra törekedve: Θ = 0,065höz ε = 3 érték tartozik. A $k_0 = 1/A = 8$ választás biztosítja, hogy a kezdeti nettó termelés egységnyi: $y_0 = 1$. Végül belõhetjük az állandó (0,16) beruházási hányadhoz tartozó zárótõkeállományt: T =10 év mellett $k^* = e^{\tau T}k_0$=9,77.

A *2. táblázat* tartalmazza a futások változó paramétereit és jellemzõit.

2. táblázat

Futási paraméterek és jellemzők

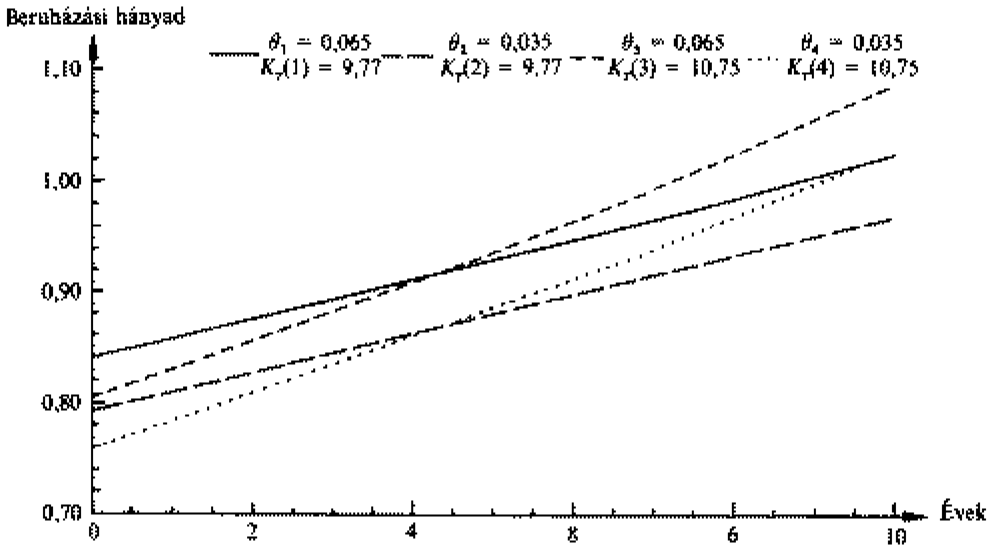
Futások	Diszkontráta ρ	Zárótőke k_T	Fogyasztás növekedési ütem τ	Fogyasztás volumen nyitó c_0	Fogyasztás volumen záró c_T	Beruházási hányad nyitó s_0	Beruházási hányad záró s_T
1.	0,065	9,77	0,02	0,840	1,206	0,160	0,160
2.	0,035	9,77	0,03	0,806	1,087	0,194	0,110
3.	0,065	10,75	0,02	0,795	0,971	0,205	0,277
4.	0,035	10,75	0,03	0,762	1,029	0,238	0,234

Az *1. futás* a vízmérték, s ehhez viszonyítjuk a többi futást: $\Theta_1 = 0,065$. A *2. futásnál* majdnem felére csökkentjük a leszámítolási lábat: $\Theta_2 = 0,035$, de megtartjuk a korábbi zárótõkeértékeket: $k_T(2) = k^*$. Ekkor a fogyasztás növekedési üteme 3 százalékra ugrik, a kezdõ fogyasztás 3,6 százalékponttal csökkent, a záró fogyasztás viszont 6 százalékponttal nõ. Zavaró viszont, hogy a kezdeti ambiciózusabb beruházási hányad 19,4 százalékról folyamatosan csökken, s az idõszak végére a nyomorúságos 11 százalékra süllyed.

A *3. futásban* visszatérünk a magas leszámítolási lábhoz: $\Theta_3 = 0,065$, s ezzel az alacsonyabb, 2 százalékos fogyasztásnövekedéshez. Ugyanakkor 10 százalékkal megemeljük a zárófeltételben szereplõ tõkeértéket: $k_T(3)=10,75$. Most a beruházási hányad még a *2. futásénál* is magasabb értékrõl indul és folyamatosan nõ 27,7 százalékig, de közben a fogyasztás egyre fokozódó mértékben elmarad az elõzõ két változattól.

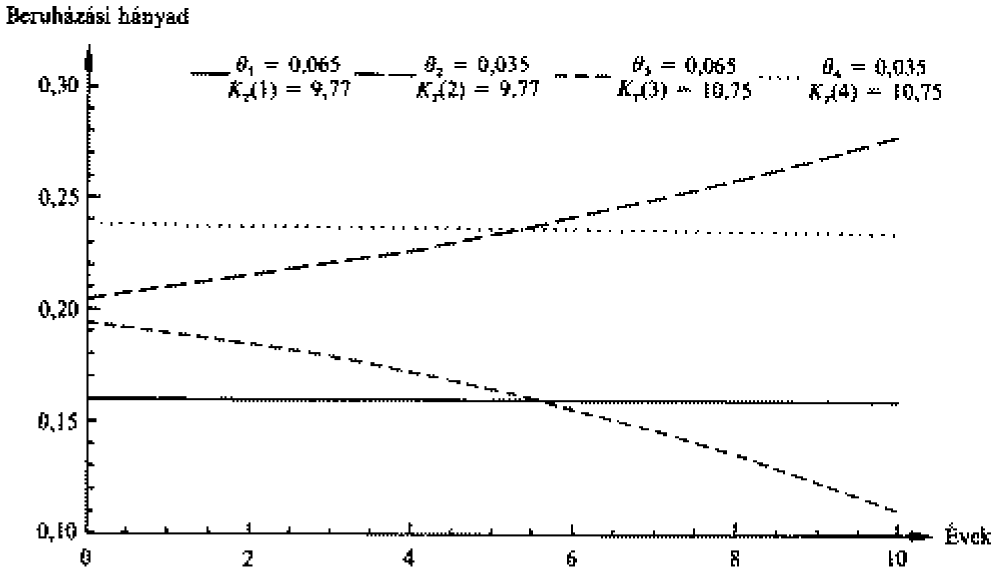
1. ábra

Optimális fogyasztási pályák



2. ábra

Az optimális beruházási hányad pályái



A *4. futásban* a *2.* és a *3. futás* javításait egyesítjük: csökkentjük a leszámítolási lábat és növeljük a zárótõke-állományt. Igaz, hogy most a kezdõ fogyasztás további 3,3 százalékponttal süllyed, de a végsõ fogyasztás már eléri az *1. futásbeli* értéket. Eközben a beruházási hányad a *3. futásbeli* középértéken stabilizálódik.

Látható, hogy még a javított modell sem tökéletes. Ha mégis elfogadjuk a modellezés eddigi eredményeit, akkor megállapíthatjuk: mind a leszámítolás csökkentésére, mind a zárótõkeállomány emelésére szükség van.

Függelék

Az általános variációszámítási feladat

A 0 $\leq$ *s(t)* $\leq$ 1 korláttól eltekintve, az (1)-(5) feladat egy klasszikus variációszámítási feladat, csak a felesleges változókat kell kiejtenünk.

Behelyettesítésekkel kiküszöbölhetõ *i(t)* és *y(t)*:

$$k'(t) = s(t) f[k(t)], \tag{F1}$$

$$c(t) = f[k(t)] - f\,'(k). \tag{F2}$$

($F2$)-t behelyettesítve (5)-be, a következő variációszámítási feladathoz jutunk:

$$F[t, k, k'] = \int_0^T e^{-\theta t} U\{f[k(t)] - k'(t)\} dt. \tag{F3}$$

A variációszámítás alaptétele szerint (lásd KÓSA [1973]) a lokálisan optimális pálya kielégíti az ún. *EulerLagrange féle másodrendû differenciálegyenletet*, amely az

$$L(t, k, k') = e^{\theta t} U\{f[k(t)] - k'(t)\} \tag{F4}$$

jelöléssel a következő alakot ölti:

$$\frac{dL_{k'}}{dt} = L_k. \tag{F5}$$

Helyettesitsük be ($F4$)-et ($F5$)-be és cseréljük meg a két oldalt:

$$e^{-\theta t} U'[f(k) - k'] f\,'[k] = \frac{d}{dt}\{e^{-\theta t} U'[f(k) - k'](-1)\}. \tag{F6}$$

($F6$) mindkét oldalát elosztjuk $e^{-\theta t} U'$-vel, visszairjuk c-t. Helyettesitsük be (9)-et ($F6$)-ba, és rendezzük át ($F2$)-t! Az új differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$c' = \varepsilon[c]^{-1}[f\,'(k) - \theta]c, \tag{F7}$$

$$k' = f(k) - c. \tag{F8}$$

($F7$)-($F8$) egy bonyolult, síkbeli differenciálegyenletrendszer, amely a peremfeltételek mellett általában egyértelmûen megoldható (ARNOLD [1984]). Ezzel beláttuk az

F1. tételt *(CASS [1965] és KOOPMANS [1965]). Ha az (1)-(5) általános felhalmozási feladatnak van lokális optimuma, akkor az kielégíti a nem lineáris (F7)-(F8) differenciálegyenletrendszert a (6) peremfeltételek mellett.*

Sajnos a feladatról ilyen általánosságban keveset tudunk mondani. A nemzetközi szakirodalomban leggyakrabban a végtelen idõhorizontú feladatot vizsgálják ($T = \infty$). A (k^0, c^0) *állandósult állapot* (ahol c'=0 és k'=0) létezését föltéve vagy bizonyítva lokális stabilitást/instabilitást keresnek (KAMIEN-SCHWARTZ [1981] I. rész, 17. fejezet). Az általános eredmény a gyorsforgalmi pálya tétele.

Végtelen idõhorizont esetén k_T felesleges, és $k_0 < k^0$ esetén $k(t)\uparrow k^0$, $k_0 > k^0$ esetén $k(t)\downarrow k^0$.

A speciális variációszámítási feladat

Mi egy másik utat követünk. A cikk elsõ részében bevezetett parametrikus függvénycsaládra szorítkozunk. Ekkor (7) és (9) miatt $\varepsilon(c) = \varepsilon$, valamint (8) szerint $f'(k) = A$.

Helyettesítsük be e specifikációkat (F7)-(F8)be:

$$c' = \varepsilon^{-1}[A - \theta]c, \qquad (F9)$$

$$k' = Ak - c, \qquad (F10)$$

Ezzel beláttuk az

F2. tételt. *Ha az (1)-(8) speciális felhalmozási feladatnak van lokális optimuma, akkor az kielégíti az (F9)-(F10) síkbeli lineáris differenciálegyenletrendszert a (6) peremfeltételek mellett.*

A F2. tétel bizonyítása. (*F9*) külön megoldható: (11)-(12), c_0 meghatározását késõbbre halasztjuk.

(*F9*) megoldásának ismeretében (*F10*) most egy egyváltozós inhomogén lineáris differenciálegyenlet, mely a megoldó szorzók módszerével oldható meg (ARNOLD [1984]). $k' - Ak = -c$ mindkét oldalát beszorozzuk e^{-At}vel:

$$e^{-At}k' - e^{-At}Ak = -c_0 e^{(\tau - A)t}.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon $e^{-At}k(t)$ szorzat deriváltja áll. Integrálva mindkét oldalt 0 és t között,

$$e^{-At}k(t) - k_0 = -c_0 \frac{e^{(\tau - A)t} - 1}{\tau - A}.$$

Behelyettesítve a $t = T$ értéket, adódik (13), majd visszahelyettesítve adódik (15).

Irodalom

ARNOLD, V. I. [1987] Közönséges differenciálegyenletek. Mûszaki Könyvkiadó, Budapest.

BANAI MIKLÓS-LUKÁCS BÉLA [1987] Beruházási pálya és variációs módszerek. Közgazdasági Szemle, 34. 432-440. o.

BLANCHARD, O. J. - FISCHER, S. [1989] Lectures on MacroéeBOLDRIN, M.-MONTRUCCHIO, L. [1986]: On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths. Journal of Economic Theory, 40, 26-39. o.

BOLDRIN, M.- WOODFORD, M. [1990] Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey. Journal of Monetary Economics, 25,189-222. o.

CASS, D. [1965] Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation. Review of Economic Studies, 32, 233-240. o.

DOMAR, E. E. [1946] Tõkenövekedés, mûszaki haladás és növekedés. Magyarul: *Szakolczai (*szerk.) [1963] 137-168. o.

HARROD, R. [1939] Egy esszé a dinamikus elméletrõl. Megjelent *Szakolczai* (szerk.) [1963] 169-192. o.

KAMIEN, M. I.-SCHWARTZ, N. L. [1981] Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. North-Holland, Amszterdam.

KOOPMANS, T. C. [1965] On the Concept of Optimal Economic Growth. Megjelent: Semain d'Etude sur le Role de 1'Analyse Econometrique dans la Formulation due Plans de Dévelopment, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, I. kötet, 225-287. o.

KOVÁCS JÁNOS-VIRÁG ILDIKÓ [1981]: Szakaszos vagy egyenletes növekedés. Közgazdasági Szemle, 28. 675-686. o.

KÓSA ANDRÁS [1973]: Variációszámítás, Tankönyvkiadó Budapest.

PONTRJÁGIN, L. SZ.- BOLTYÁNSZKIJ, V. G.-GÁMKRELIDZE, R. V.- MISCSENKO, J. F. [1961/1968] Optimális folyamatok elmélete. Mûszaki Könyvkiadó, Budapest.

RAMSEY, F. [1928] A Mathematical Theory of Savings. Economic Journal 38, 543-559. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1993] Káoszelmélet és közgazdaságtan. Magyar Tudomány, 38, 503-511. o.

SOLOW, R. [1956] A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics, 70, 65-94. o.

SOLOW, R. [1957]: A technikai változás és az aggregált termelési függvény. Megjelent: *Szakolczai* (szerk.): [1967] 122-140. o.

SRINIVASAN, T. N. [1964]: On a Two-sector Model of Growth. Econometrica; 32, 358-373. o.

SZAKOLCZI GYÖRGY (szerk.) [1963]: A gazdasági fejlõdés feltételei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

TAKAYAMA, A. [1974]: Mathematical Economics. Dryden, Hinsadale, IL.

TINBERGEN, J. [1960]: Optimum Savings and Utility Maximization over Time. Econometrica, 28, 481-489. o.

VIRÁG ILDIKÓ [1969]: Optimális felhalmozási pályák. Gazdasági fejlõdés és tervezés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 108-136. o.

UZAWA, H. [1964]: Optimal Growth in a Two-sector Model of Capital Accumulation. Review of Economic Studies, 31, 1-24. o.