Közgazdasági Szemle, L. évf., 2003. február (112–135. o.)

KŐHEGYI GERGELY–STÉPÁN GÁBOR

A versenyzői gazdaság stabilitása késleltetett áralkalmazkodás mellett

A versenyzői egyensúly létezése, egyértelműsége és hatékonysága mellett az általános egyensúlyelmélet egyik központi témája a stabilitás. A tanulmányban ezt a kérdést vizsgáljuk meg részletesebben, egy speciális áralkalmazkodási szabály feltételezésével. A standard feltevésnek megfelelő szimultán reakciók posztulálása helyett „megengedjük", hogy a termelők késéssel reagáljanak a keresletben bekövetkező változásokra. A könnyebb összehasonlíthatóság érdekében eredményeink ismertetése előtt összefoglaljuk a késleltetés nélküli áralkalmazkodással kapcsolatos stabilitási eredményeket, valamint ismertetjük az elemzéshez szükséges speciális matematikai módszereket.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C0, D0,D5.

Az általános egyensúlyelmélet feltételrendszerét és következtetéseit számos bírálat érte megjelenése óta. E bírálatok sok szempontból jogosak, ha a modellrendszert úgy tekintjük, hogy az árucsere – mint társadalmi koordinációs mechanizmus – működését önmagában hivatott magyarázni. Ha azonban csupán kiindulópontként használjuk, apró módosításokkal értékes következtetéseket vonhatunk le belőle. Ennek a tanulmánynak nem célja az általános egyensúlyelmélet bírálata. Inkább tekinthető kiegészítésének egy partikuláris területen, nevezetesen a dinamikus áralkalmazkodás terén. A további elemzés során tehát, a késleltetett reakciók lehetőségét kivéve, nem kívánunk kilépni a standard mikroökonómia által meghatározott szemléleti keretből.

Előzmények

A közgazdasági általános egyensúlyelmélet igen hosszú múltra tekint vissza. A gondolat, amely szerint a gazdasági szereplők egyéni érdeküket követve cselekszenek és mégis valamiféle, társadalom számára előnyös, „természetes rendet" alakítanak ki, a közgazdasági gondolkodás kezdeteiben gyökerezik. Ezt a módszertani individualista, decentralizált szabályozáson alapuló koncepciót Adam Smith foglalta össze elsőként 1776-ban (*Smith* [1992]). A 19. század neoklasszikus közgazdászai – elsősorban *Walras* [1874], aki tulajdonképpen az általános egyensúlyelmélet megalkotója – ezt az elvet ötvözték a marginalista elmélettel, valamint az abszolút igazságosság elvén alapuló, „tiszta gazdaság" működéséről alkotott elképzelésével. Már Walras is felvetett két, a későbbiekben is igen fontos problémát: az egyik az ármércejószág (*numéraire*) szerepeltetéseként, a másik pedig a róla elnevezett törvényként (*Walras-törvény*) ismert. Modellje tulajdonképpen egy egyenletrendszer volt, amelyben az egyensúly létezését az ismeretlenek és az egyenletek számának egye-

Kőhegyi Gergely a BKÁE ötödéves hallgatója (gkohe@ullman.inf.elte.hu).
Stépán Gábor tanszékvezető egyetemi tanár, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, műszaki mechanikai tanszék (stepan@mm.bme.hu).

zésével próbálta igazolni. Mint ahogy azonban Neisser és Stackelberg egymástól függetlenül kimutatták, ez az érvelés nem elégséges az egzisztencia igazolásához (lásd *Wald* [1951]). Az első matematikailag pontos bizonyítást, termeléssel bővített cseregazdaságra, *Wald* [1951] adta 1936-ban. A ma ismert egzisztenciafeltételek kidolgozása és az egyensúly létezésének modern eszközökkel való bizonyítása általános esetre *Arrow–Debreu* [1954] tanulmányhoz fűződik.

Az egyensúly egyértelműségének problémáját speciális esetre szintén *Wald* [1951] tisztázta először, így tőle származik a két későbbi unicitástétel őse. Az egyik tételben szereplő, egyértelműséget biztosító feltétel a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómája*, a másik tétel kulcseleme pedig az *általános helyettesíthetőség*.

A stabilitás kérdése az egyensúllyal kapcsolatban szintén korán felmerült. *Walras* [1874–2000] *tâtonnement*-elméletében tulajdonképpen már stabilitási kérdéseket tárgyalt, és parciális egyensúlyi modelljében *Marshall* [1890–2000] is megkülönböztette a stabil és instabil egyensúlyi állapotokat. A stabilitás első pontos definícióját (*perfekt*, illetve *imperfekt stabilitás*) azonban *Hicks* [1978] fogalmazta meg 1939-ben, aki az egyváltozós áralkalmazkodási modell következtetéseit általánosítva, megjegyezte, hogy a stabilitás következményeket rejt magában a keresleti és kínálati függvények alakjára vonatkozóan az egyensúly közelében. A hicksi statikus megközelítéssel szemben *Samuelson* [1941] definíciója, amely szerint az egyensúly közeléből induló pályáknak az egyensúlyhoz kell tartaniuk, megnyitotta az utat a dinamikus matematikai rendszerek eszközeivel való elemzés számára. Mindehhez azonban szükség volt az áralkalmazkodási folyamat mint differenciálegyenlet felírására, amely az egyensúlyi pontokon kívül is jellemzi a rendszer viselkedését. Ennek egy lehetséges változatát adta meg *Samuelson* [1941], formalizálva Walras és követőinek implicit feltevését, miszerint minden termék ára túlkeresletével (keresletének és kínálatának különbségével) arányos ütemben növekszik, negatív túlkereslet esetén pedig csökken. Ebben a dinamikus modellben az instabilitás lehetőségére *Scarf* [1960] és *Gale* [1963] szolgáltattak példát. Az egyensúlyi ár lokális stabilitási feltételét végül *Metzler* [1945] fogalmazta meg az *általános helyettesíthetőség*nek a dinamikus modellre való kiterjesztésével.

Az áralkalmazkodási folyamat globális stabilitásának vizsgálatában az igazi nagy előrelépést *Arrow–Hurwicz* [1958] tanulmánya jelentette, amelyben megmutatták, hogy a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómája*, kis kiegészítésekkel, biztosítja a gazdaság globális stabilitását. A másik unicitási feltételnek, az *általános helyettesíthetőség*nek a globális stabilitására vonatkozó pozitív következményeit pedig *Arrow–Block–Hurwicz* [1959] tárgyalta.

Időkésleltetés az áralkalmazkodási folyamatban tulajdonképpen már *Ezekiel* [1938] híres pókhálómodelljében is szerepelt, melyben a kaotikus viselkedés lehetőségét később *Chiarella* [1988] elemezte. Ezekiel vizsgálatában az idő diszkrét változó. Ez a megközelítés fellelhető a főként makroökonómiai modellek alapjául szolgáló várakozási modellekben (*adaptív, racionális, naiv várakozások*) is. Különböző várakozási modellekben az egyensúly lokális stabilitási feltételeinek összehasonlítását *Simonovits* [1999] végezte el, *Hommes* [1999*a*], [1999*b*] pedig alkalmazta őket, korlátozott racionalitást is megengedő pókhálómodellbeli vizsgálataihoz.

A diszkrét idő feltételezése sok szempontból előnyös, mivel könnyen kezelhető numerikus módszerekkel, és szemléltethető számítógépes szimulációkkal. Ebben a tanulmányban azonban az általánosabbnak tekinthető analitikus elemzési utat követjük, ezért a következőkben folytonos időt feltételezünk. Folytonos idejű késleltetett gazdasági modellek találhatók még *Andorka–Dányi–Martos* [1967] munkájában.

Egy szigorú feltételrendszer

A továbbiakban több módszertani problémát megkerülve, egy absztrakt gazdaságot feltételezünk, amelyben elméleti, nem valóságos áralkalmazkodási folyamatok jellegzetességeit vizsgáljuk. Feltételrendszerünk néhány pontja ezen belül is szigorúbb, mint amit az elemzés kerete feltétlenül megkövetelne, azonban a legfőbb eredményeket ez lényegesen nem befolyásolja, csupán a technikai apparátust egyszerűsíti.

A gazdaság véges sok szereplőjét funkcionálisan két csoportra osztjuk: *fogyasztókra* és *termelőkre*. Ez a felosztás nem feltétlenül átfedésmentes. Az első csoport tagjai javakat (például élelmiszer) vonnak ki a gazdaságból fogyasztási tevékenységükkel, illetve javakat (például munkaerő) szolgáltatnak a gazdaság számára, tehát a termelési tényezők is az ő birtokukban vannak. A második csoport tagjai csupán a javak transzformációját végzik (termelési tényezők felhasználásával hoznak létre termékeket). A javakat fizikai tulajdonságaik alapján különböztetjük meg egymástól, de feltesszük róluk, hogy *mérhetők*, *folytonosan oszthatók* és egy típuson belül teljesen *homogének,* azaz azonos jószág egyes egységei megkülönböztethetetlenek egymástól. Véges sok (n számú) jószágot feltételezünk, amelyek sorrendjét valamilyen szempont szerint, önkényesen rögzítve, a belőlük rendelkezésre álló mennyiségeket egy vektorba rendezzük. Az így kapott jószágkosár (vektor) reprezentálható az n-dimenziós euklideszi tér (R^n jószágtér) egy pontjaként.

A gazdaság természetes szerkezetének leírása mellett szükség van a szereplők egymás közti viszonyrendszerének, döntési eljárásainak, viselkedési formáinak megadására, amit összefoglalóan *gazdasági mechanizmusnak* nevezünk. A továbbiakban vizsgálatunkat a *versenyzői gazdaságokra* korlátozzuk, amelyet a következő speciális mechanizmus jellemez: 1. a gazdaság szereplői egymástól teljesen elkülönülten hozzák meg döntéseiket. Az egyetlen mindenki által elérhető információt az árak ($\mathbf{p} \in R^n_+$) hordozzák, ezért csak az árak által közvetített csere lehetséges (ezzel implicite feltételezzük, hogy minden jószágnak van pozitív ára, tehát minden jószágnak van piaca);

2. a gazdasági szereplők árelfogadók, azaz úgy gondolják, hogy egyéni döntéseik nem befolyásolják az árakat, ezért stratégiai lépéseket sem tesznek azok befolyásolására;

3. a fogyasztók haszonmaximalizálók, a termelők pedig profitmaximalizálók, így döntéseiket e viselkedési minták alapján hozzák meg;

4. a termelőknek a javak transzformációjából származó profitját teljes egészében felosztják a fogyasztók között.

Képzeletbeli gazdaságunk termelői tehát az árakat ismerve, elkülönülten maximalizálják profitjukat termelési halmazuk felett. A fogyasztók maximalizálják hasznukat költségvetési halmazuk felett, amelyet a termelők profitjából való részesedésből és a készletekből származó jövedelem határoz meg.

Feltesszük, hogy a fogyasztók *kereslete*, illetve a termelők *kínálata*, minden termékből, egyértelműen meghatározott minden lehetséges ár esetén. Ekkor jelölje $D_i(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n) = D_i(\mathbf{p})$ és $S_i(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n) = S_i(\mathbf{p})$, $i = 1,\dots,n$-re, az i-edik termék keresletét, illetve kínálatát, amelyek az összes jószág árának függvényei. Ezeket vektorba foglalva, definiálhatjuk a $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ keresleti, $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ kínálati és $\mathbf{Z}(\mathbf{p}) \doteq \mathbf{D}(\mathbf{p}) - \mathbf{S}(\mathbf{p}) - \mathbf{\mathring{u}}$ túlkeresleti függvényeket, ahol $\mathbf{\mathring{u}}$ jelöli a gazdaság szereplőinek, összességében rendelkezésére álló készleteket az egyes termékekből, szintén vektorba foglalva.

Feltesszük azt is, hogy a gazdasági szereplők nem az árak abszolút nagyságát, hanem egymáshoz viszonyított arányát veszik figyelembe. Ekkor megmutatható, hogy $\mathbf{D}(\mathbf{p})$, $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ és így $\mathbf{Z}(\mathbf{p})$ is az árak *nulladfokú homogén* függvénye, azaz $\mathbf{Z}(\kappa\mathbf{p}) = \mathbf{Z}(\mathbf{p})$, bármely $\kappa > 0$ valós számra. Emiatt az árakat normálhatjuk. Ehhez két utat választhatunk: vagy az árak összegét rögzítjük, vagy egy ármércejószág *(numéraire)* árát rögzítjük, és a többi ár abszolút nagyságát ehhez viszonyítva határozzuk meg. Látható, hogy az első megoldás általánosabb, hiszen nem emel ki egyetlen kitüntetett jószágot sem – ellentétben a második megoldással. A később kimondandó állítások nagy része az általánosabb normálással is igaz, ahol ez nem így van, ott arra külön utalunk majd.

Tegyük fel még, hogy a keresleti és kínálati függvények, így a túlkeresleti függvény is, egyszer folytonosan differenciálható, azaz $\mathbf{D}(\mathbf{p}),\mathbf{S}(\mathbf{p}) \in C^1(R^n,R^n)$, és a vizsgált gazdaságban egyetlen termék sem *Giffen-jószág*:

$$\frac{\partial D_i(\mathbf{p})}{\partial p_i} < 0 \text{ és } \frac{\partial S_i(\mathbf{p})}{\partial p_i} > 0,\ i = 1,\dots,n\text{-re (a kereslet és kínálat törvénye érvényesül).}$$

A következőkben definiálunk néhány nagyon fontos fogalmat. Az első fogalom $n-1$ piac kitisztulása esetén az n-edik piac kitisztulására utal, azaz arra, hogy összességükben a keresett javak értéke megegyezik az összességükben rendelkezésre álló javak értékével.

1. definíció. Azt mondjuk, hogy a gazdaságban teljesül a *Walras-törvény*, ha a túlkeresletek aggregált összege zérus, azaz a túlkeresleti vektor mindig merőleges az árvektorra: $\mathbf{Z}(\mathbf{p})\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a Walras-törvény gazdaságunkban mindig teljesül, ami a fogyasztókról egyfajta telíthetetlenségi tulajdonságot feltételezve biztosított.

2. definíció. Legyen $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$ rögzített árvektor. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{Z}(\mathbf{p})$ túlkeresleti függvény kielégíti a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját*, ha tetszőleges $\mathbf{p} \neq \nu\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$, $\nu \in R$ árvektor esetén a $\mathbf{Z}(\mathbf{p})\mathbf{p}^0$ skaláris szorzat értéke pozitív.

A kinyilvánított preferencia gyenge axiómájának teljesülése az egyének szintjén a szereplők racionális viselkedésének egy speciális formájára utal. Aggregált szinten azonban azt jelenti, hogy a jövedelmi hatások összességükben nem túl nagyok.

3. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{p}^0$ pontban az *általános helyettesíthetőség* teljesül, ha a $\dfrac{\partial Z_i(\mathbf{p}^0)}{\partial p_j}$ parciális deriváltak pozitívak, $i \neq j$ esetén.

4. definíció. Azt mondjuk, hogy a $(\mathbf{D}^0,\mathbf{s}^0,\mathbf{p}^0)$ vektorhármas a gazdaság *egyensúlyi állapota*, ha *1.* $\mathbf{D}^0$ egyéni haszonmaximalizálásból származó keresleti vektor, *2.* $\mathbf{S}^0$ egyéni profitmaximalizálásból származó kínálati vektor, *3.* $\mathbf{D}^0 \leq \mathbf{S}^0 + \mathbf{\grave{u}}$, azaz fennáll a *naturális egyensúly* (nem fogyasztanak több jószágot, mint amennyi rendelkezésre áll), *4.* $\mathbf{p}^0(\mathbf{D}^0 - \mathbf{S}^0 - \mathbf{\grave{u}}) = \mathbf{0}$, azaz fennáll a *szigorú értékegyensúly* (teljesül a Walras-törvény).

Megmutatható, hogy a fenti feltételekkel adott gazdaságban – sőt, jóval általánosabb feltételekkel adott versenyzői gazdaságban is –, amennyiben a túlkeresleti függvény alulról korlátos, létezik egyensúlyi állapot. Ezt az állítást mondja ki *Arrow–Debreu* [1979–1954] egzisztenciatétele. Ezenkívül igazolható, hogy az egyensúlyi állapot egyértelmű is, ha a túlkeresleti függvény kielégíti a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, vagy ha minden pontban teljesül az általános helyettesíthetőség feltétele (lásd *Mas-Colell–Whinston–Green* [1995] 606. o.). Mindezek alapján feltesszük, hogy minden későbbiekben vizsgált esetben egyértelműen létezik egyensúlyi állapot.

A dinamikus viselkedés leírásához tekintsük az árak időfüggvényét: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, ahol t folytonos. Mivel a gazdaság dinamikáját ez lényegesen nem befolyásolja, a továbbiakban tegyük fel, hogy $\mathbf{\grave{u}} = 0$. *Samuelson* [1941] nyomán az áralkalmazkodást a következő differenciálegyenlet-rendszerrel jellemezhetjük:

$$\dot{p}_i(t) = \mu_i Z_i(\mathbf{p}(t)), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

ahol μ_i a jószág piacára jellemző konstans, áralkalmazkodási sebesség, amely a termék áralkalmazkodásának gyorsaságát mutatja. Mivel egyetlen termék sem Giffen-jószág, az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy $\mu_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$-re. Az (1) egyenlet a heurisztikus leírásnak megfelelő dinamikát szemléltet a legkézenfekvőbb módon, hiszen az árváltozás nagysága arányos a túlkereslettel, irányát pedig a jószág túlkeresletének előjele határozza meg.[1] Problémát jelenthet azonban, hogy a fenti modellben negatív árak is adódhatnak. Ennek elkerülése érdekében újabb megkötésekkel szokás élni (például $Z_i(\mathbf{p}) \doteq 0$, ha $p_i \leq 0$ és $D_i(\mathbf{p}) - S_i(\mathbf{p}) < 0$). Ekkor azonban a túlkeresleti-függvény folytonosságának esetleges hiánya miatt nem feltétlenül teljesülnének a differenciálegyenletekre vonatkozó alapvető tételek. Mindezek miatt mi maradunk a folytonos jobb oldalú

[1] Megjegyezzük, hogy más áralkalmazkodási modellek is ismertek, például *Bródy* [1980] egyenletrendszere, amely figyelemreméltó indokok alapján a következő alakot ölti: $\ddot{p}_i(t) = \mu_i Z_i(\mathbf{p}(t))$, $i = 1,\ldots,n$.

(1) egyenletrendszer elemzésénél és csak pozitív árakat veszünk figyelembe, azaz feltesszük, hogy $\mathbf{p} \in R^n_+$ minden releváns esetben, így az egyensúlyban is.

Ha képezzük a μ_i áralkalmazkodási sebességekből az $\mathrm{M} \in R^{n \times n}$ diagonális mátrixot, akkor a (1) differenciálegyenlet-rendszer a következő alakban írható:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MZ}(\mathbf{p}(t)). \tag{2}$$

Az imént felvázolt áralkalmazkodási modellben a kereslet és a kínálat ugyanazon időpontok függvénye, ezért szimultán határozódnak meg. Ezt a feltételt nemcsak valóságidegensége miatt, hanem elvi következményei miatt is érdemes felülvizsgálni; lényegében ez a dolgozat elsődleges célja.

Tekintsünk tehát egy olyan modellt, amelyben a kereslet a t időpontbeli ár függvénye: $\mathbf{D}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}(\mathbf{p}(t))$; a kínálat azonban egy korábbi, $t - \tau$ időpontbeli ártól függ: $\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \mathbf{S}(\mathbf{p}(t - \tau))$, azaz csak némi késéssel tud alkalmazkodni a kereslethez. Ennek oka lehet a termelés átstrukturálása, újabb erőforrások bevonása (például új üzemek építése) vagy az információszerzés időbeli korlátozottsága (például piackutatások időigényessége). Ekkor az áralkalmazkodást leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő alakot ölti:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t - \tau)). \tag{3}$$

A (3) egyenletrendszer késleltetett tagot is tartalmaz, ezért nem alkalmazhatók rá a közönséges differenciálegyenletekre kidolgozott módszerek. Elemzésük bonyolultabb eszközöket igényel, ezeket tekintjük át majd vázlatosan a Késleltetett differenciálegyenletek című fejezetben, különös tekintettel a stabilitási kérdésekre. Mindkét rendszer kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatához alapvető fontosságú a következő fogalom:

5. definíció. Ha $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{p}^0$ és így $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{p}^0$ vektort a gazdaság *egyensúlyi pontjának* nevezzük.

Látható, hogy az egyensúlyi pontot reprezentáló $\mathbf{p}^0$ a gazdaság egyensúlyi állapotához tartozó árvektor, így a stabilitási vizsgálatokban kitüntetett szerepet játszik. A gazdaság stabilitási jellemzőinek vizsgálatakor a rendszernek két fő tulajdonságát kell megvizsgálnunk. Egyik az egyensúlyi pont *lokális stabilitása,* amely arra vonatkozik, hogy ha a rendszer valamilyen külső hatás következtében (például a preferenciák vagy a technológia változása) kimozdul az egyensúlyi pontból, de annak kis környezetében marad, akkor visszatér-e oda (legalábbis közelít-e a kérdéses egyensúlyi ponthoz), vagy eltávolodik onnan. A másik a rendszer *globális stabilitása*, amely azt jelzi, hogy bármilyen árvektorból kiindulva, a kereslet és kínálat játéka egyensúlyi pont felé tereli-e a gazdaságot. Látható, hogy a kéttípusú stabilitási tulajdonság nem ekvivalens. Még egyértelmű egyensúlyi pont esetén is csak a globális stabilitásból következik a lokális stabilitás. Fordítva ez nem teljesül (hiszen egy nemlineáris rendszer tartalmazhat például instabil határciklust vagy kaotikus tartományt), emiatt mindkét stabilitási tulajdonság vizsgálatra szorul.

Áralkalmazkodás késleltetés nélkül

Ebben a részben, az összehasonlíthatóság érdekében, megkíséreltünk összefoglalni a késleltetést nem tartalmazó, szimultán áralkalmazkodási szabállyal jellemezhető gazdaságok stabilitási tulajdonságaival kapcsolatos néhány eredményt. Ehhez nagymértékben támaszkodtunk *Zalai* [1989] munkájára, amelyben a késleltetés nélküli esetre vonatkozó állítások bizonyítással együtt megtalálhatók.

Ha a legegyszerűbb esetet tekintjük, azaz olyan gazdaságot vizsgálunk, amelyben csak egyetlen termék van forgalomban, az egyensúlyi pont lokális és a rendszer globális stabilitása egyaránt következik a kiinduló feltételekből, mivel az egyváltozós keresleti függvény szigorúan monoton csökken, a kínálati függvény pedig szigorúan monoton nő.

Egy olyan gazdaság lokális és globális stabilitási jellemzőinek vizsgálata, amelyben több termék van forgalomban, más eszközöket igényel. Az egyensúlyi pont lokális stabilitásának vizsgálata elvégezhető a lokálisan linearizált rendszer egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálatával. A globális stabilitás vizsgálatának hatékony eszköze viszont, némi kiegészítéssel, a *Ljapunov-függvény*ek módszere. Ez utóbbi technikához kihasználható, hogy a gazdaságot jellemző áralkalmazkodási szabály explicite időfüggetlen, elsőrendű, autonóm differenciálegyenlet-rendszer, vagyis megoldásai *dinamikus rendszert* alkotnak.

Elsőként a lokális stabilitás kérdését vizsgáljuk. Tekintsük a (2) áralkalmazkodási egyenletet! Alkalmazzuk a szigorúbb árnormalizálási eljárást, azaz *Walras* [1874] nyomán rögzítsük az n-edik termék árát egységnyinek, $p_n = 1$. Ezzel az n-edik termék értelmezhető egyfajta leegyszerűsített pénzfogalomként. Ekkor teljesül a következő *Metzler* [1945]-től származó állítás:

1. tétel. Ha a $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontban teljesül az általános helyettesíthetőség, akkor a $\dot{p}_i(t) = \mu_i Z_i(p(t))$, $i = 1,2,\ldots,n$, $p_n = 1$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaság $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan stabil.

A globális stabilitás vizsgálatához tekintsünk először egy alapvető fontosságú állítást, amely a gazdaság struktúráját jellemzi (*Arrow és Hahn* [1971] 285. o.)!

2. tétel. Ha teljesül a Walras-törvény, akkor a (2) rendszer megoldásai korlátosak.

Kéttermékes gazdaságban, a fenti tétel értelmében, a Walras-törvény garantálja a rendszer globális stabilitását (*Arrow–Hahn* [1971]). Késleltetett áralkalmazkodás esetén azonban, mint azt majd látni fogjuk, ez a kedvező tulajdonság nem áll fenn. Kettőnél több termék forgalma esetén, késleltetés nélkül is, egyéb kiegészítő feltételekre van szükség. Ilyen kiegészítő feltétel lehet például az egyensúly lokális stabilitását is biztosító általános helyettesíthetőség feltétele. Erről szól az *Arrow–Block–Hurwicz* [1959] nevéhez fűződő *3. tétel*.

3. tétel. Ha az általános helyettesíthetőség minden pontban fennáll, akkor a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MZ}(\mathbf{p}(t))$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaság globálisan stabil.

Látható, hogy a késleltetés nélküli esetekben az unicitást garantáló feltételeket némileg kiegészítve biztosított a rendszer stabilitása. A késleltetést is tartalmazó gazdaságokban azonban az általános helyettesíthetőség feltétele nem garantálja sem az egyensúly lokális, sem a gazdaság globális stabilitását. Mielőtt mindezt részletesebben elemeznénk, tekintsük át a késleltetett differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatával kapcsolatos főbb módszereket!

Késleltetett differenciálegyenletek

Késleltetéssel kapcsolatos jelenségek tömegével fordulnak elő különböző tudományterületeken. Az ezekhez kapcsolódó matematikai módszertan kidolgozására azonban csak az 1950-es években került sor. Ennek egyik oka, hogy míg a *közönséges differenciálegyenletekkel (Ordinary Differential Equation – ODE)* leírható folyamatok esetében a rendszer véges szabadságfoka véges dimenziós problémát indukál, addig a késleltetést is tartalmazó rendszerek végtelen dimenziós problémához vezetnek. Ennek szemléltetésére tekintsük a legegyszerűbb formájú lineáris *késleltetett differenciálegyenletet (Delay-Differential Equation – DDE)*:

$$\dot{x}(t) = x(t-1), \tag{4}$$

ahol $x(t) \in R$ skaláris változó, a késleltetés egységnyi, t pedig folytonos. Ha a megoldást $x(t) = Ke^{\lambda t}$ alakban keressük és behelyettesítjük a (4) egyenletbe, akkor a következőt kapjuk:

$$\lambda Ke^{\lambda t} = e^{-\lambda}Ke^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda - e^{-\lambda} = 0. \tag{5}$$

A (5) összefüggés a (4) késleltetett differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete, amelynek végtelen sok komplex megoldása van. Ebből a példából jól látszik, hogy a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó elmélet általánosítása a végtelen dimenziós fázistérre nem triviális: olyan eszközöket igényel, amelyeket *funkcionál-differenciálegyenletekre (Functional Differential Equation – FDE)* dolgoztak ki. A továbbiakban tekintsünk át néhány, a későbbi elemzés szempontjából alapvető fontosságú definíciót és állítást!

Tekintsük a következő struktúrát! Legyen $r \geq 0$ adott valós szám, és R^n egy n-dimenziós vektortér a valós számtest felett az euklideszi-normával. Legyen továbbá $C([a,b],R^n)$ az $[a,b]$ zárt intervallumból R^n-be képező folytonos függvények Banach-tere (az egyenletes konvergencia topológiájával). Ha $[a,b] \doteq [-r,0]$, akkor legyen a $\text{ö} \in C([-r,0],R^n)$ függvény normája: $\|\text{ö}\| \doteq \sup_{\theta\in[-r,0]} |\text{ö}(\theta)|$. Legyen még $\sigma \in R$, $Q \geq 0$ és $\mathbf{x} \in C([\sigma - r, \sigma + Q], R^n)$. Ekkor minden $t \in [\sigma, \sigma + Q]$ esetén definiáljuk az $\mathbf{x}_t \in C([-r,0],R^n)$ függvényt a következőképpen: $\mathbf{x}_t(\theta) \doteq \mathbf{x}(t+\theta)$, ahol $-r \leq \theta \leq 0$.

6. definíció. Ha $f: U \rightarrow R^n$, ahol $U \subset R \times C([-r,0],R^n)$, adott függvény és a felső pont t-szerinti, jobb oldali deriváltat jelöl, akkor az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t,\mathbf{x}_t) \tag{6}$$

összefüggést *késleltetett funkcionál-differenciálegyenletnek (Retarded Functional Differential Equation – RFDE)* nevezzük.

Ha r véges szám, akkor a késleltetés korlátos. Ha $r = +\infty$, akkor $\mathbf{x}(t)$ időbeli változására a múlt minden eseménye hatással van. Ez utóbbi eset több olyan problémát felvet, amellyel e tanulmányban nem foglalkozunk, bár a későbbi állítások egy része erre az általánosabb esetre is érvényes.

7. definíció. Az $\mathbf{x}$ függvényt a (6) késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet *megoldásának* nevezzük a $[\sigma - r, \sigma + Q)$ intervallumon, ha létezik olyan $\sigma \in R$ és $Q > 0$, hogy $\mathbf{x} \in C([\sigma - r, \sigma + Q),R^n]$, valamint $(t,\mathbf{x}_t) \in U$ és $\mathbf{x}(t)$ kielégíti a (6) egyenletet minden $t \in [\sigma,\sigma + Q]$ esetén.

8. definíció. Legyen $\sigma \in R$ és $\text{ö} \in C([-r,0],R^n)$ adott. Ekkor az $\mathbf{x}(t,\sigma,\text{ö})$ függvényt a (6) késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet *megoldásának* nevezzük a *σ-beli* ö *kezdeti feltétellel*, ha létezik olyan $Q > 0$, hogy $\mathbf{x}(t,\sigma,\text{ö})$ a (6) késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet megoldása a $[\sigma - r,\sigma + Q)$ intervallumon és

$$\mathbf{x}_\sigma(\sigma,\text{ö}) = \text{ö}. \tag{7}$$

Ha a (6) egyenletben az f függvény folytonos és $f(t,\text{ö})$ kielégíti a lokális Lipschitz-feltételt ö-re U minden kompakt halmazán, akkor a (6)–(7) rendszer megoldásának lokális egzisztenciája, unicitása és a kezdeti paraméterektől való folytonos függés igazolható (*Hale* [1977] 37. o.). A megoldás kiterjesztése újabb megfontolásokat igényel (*Hale* [1977] 42. o.).

Látható, hogy a (6) egyenletben megadott általános forma magában foglalja az $r = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ és $\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t - \tau_1(t)),\ldots,\mathbf{x}(t - \tau_p(t)))$, $0 \leq \tau_j(t) \leq r$; $j = 1,\ldots,p$ egyenleteket, azaz a közönséges differenciálegyenletek és késleltetett differenciálegyenletek általános eseteit.

A közönséges differenciálegyenletek stabilitási fogalmai általánosíthatók a késleltetett funkcionál-differenciálegyenletekre.

9. definíció. Tegyük fel, hogy $f(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall t \in R$-re. A (6) egyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása *Ljapunov-értelemben stabil*, ha minden $\sigma \in R$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta = \delta(\sigma,\varepsilon)$, hogy minden $t \geq \sigma$-ra és $\|\boldsymbol{\ddot{o}}\| < \delta$-ra $\|\mathbf{x}_t(\sigma,\boldsymbol{\ddot{o}})\| \leq \varepsilon$ teljesül.

10. definíció. A (6) egyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása *aszimptotikusan stabil*, ha Ljapunov-értelemben stabil, és minden $\sigma \in R$-hez létezik $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, hogy minden $\|\boldsymbol{\ddot{o}}\| < \Delta$-ra $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\mathbf{x}_t(\sigma,\boldsymbol{\ddot{o}})\| = 0$ is teljesül.

1. megjegyzés. Legyen $\mathbf{y}(t)$ a (6) egyenlet bármely megoldása. Ekkor $\mathbf{y}$ (aszimptotikusan) stabil, ha a $\dot{\mathbf{z}}(t) = f(t,\mathbf{z}_t + \mathbf{y}_t) - f(t,\mathbf{y}_t)$ transzformált egyenlet $\mathbf{z} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása (aszimptotikusan) stabil.

A *lineáris autonóm rendszer* általános alakja a következő:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = L(\mathbf{x}_t), \tag{8}$$

ahol $L : C \to R^n$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor a *Riesz-féle reprezentációs tétel* (lásd *Riesz–Szőkefalvi Nagy* [1988] 76. o.) értelmében (8) a következőképpen írható:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \int_{-\infty}^{0} [\mathbf{d}\boldsymbol{\varsigma}(\theta)]\,\mathbf{x}(t+\theta), \tag{9}$$

ahol $\boldsymbol{\varsigma}$ egy $n \times n$-es mátrix, amelynek elemei a $(-\infty,0]$ intervallumon értelmezett, korlátos változású függvények, az integrál jel pedig *Stieltjes-integrált* jelöl.

11. definíció. A (9) egyenletnek megfelelő *karakterisztikus függvény*:

$$P(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{I} - \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\theta}\mathbf{d}\boldsymbol{\varsigma}(\theta)\right), \tag{10}$$

ahol $\mathbf{I}$, egy $n \times n$-es méretű egységmátrixot jelöl, λ pedig komplex szám.

A karakterisztikus függvényt megkaphatjuk *Laplace-transzformáció* alkalmazásával vagy az $x(t) = Ke^{\lambda t}$ alakú megoldás (9) egyenletbe helyettesítésével.

12. definíció. A (9) egyenletnek megfelelő (10) karakterisztikus függvényt *stabilnak* nevezzük, ha a $\{\lambda\text{:Re } \lambda \geq 0,\ P(\lambda) = 0\} = \emptyset$, azaz $P(\lambda)$ minden gyökének valós része negatív.

Míg közönséges differenciálegyenletek esetében a karakterisztikus függvény stabilitása és a triviális megoldás aszimptotikus stabilitása ekvivalens, addig késleltetett funkcionál-differenciálegyenletek esetében nem ilyen egyszerű a helyzet. A késleltetett funkcionál-differenciálegyenletek azon osztálya, amelyek esetében ez az ekvivalencia fennáll, a következő feltétellel határozható meg (*Stépán* [1989] 6. o.):

$$\exists \nu > 0: \int_{-\infty}^{0} e^{-\nu\theta} \left| d\eta_{kj}(\theta) \right| < +\infty, \qquad k,j = 1,\ldots,n. \tag{11}$$

Definiáljuk most a komplex számtest egy részhalmazát a következőképpen: $\aleph \doteq \doteq \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq -\nu + \varepsilon, |\lambda| \leq H\}$, ahol ε és H elegendően kicsi, illetve elegendően nagy valós számok. Szükség van még egy fontos definícióra.

13. definíció. Legyen a komplex számsíkon:

$$(g_1)\text{:} \quad \lambda = He^{i\varphi}, i = \sqrt{-1}, H \in R_+, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(g_2)\text{:} \quad \lambda = i\omega,\ \omega \in (0,H),$$

$$(g_3)\text{:} \quad \lambda = i\omega,\ \omega \in (-H,0).$$

A $(g) = \bigcup_{k=1}^{3} (g_k)$ görbét *Bromwich-kontúrnak* nevezzük.

4. tétel. (*Stépán* [1989] 14. o.) A (11) feltételt kielégítő (10) karakterisztikus egyenlet pontosan akkor stabil, ha

$$P(i\omega) \neq 0, \qquad \omega \in [0,\infty) \text{ és } \lim_{H\to+\infty} \oint_{(g)} \frac{1}{P(\lambda)} \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = 0. \tag{12}$$

A tétel első fele azt mondja ki, hogy a karakterisztikus függvénynek nem lehet gyöke a képzetes tengelyen. A Bromwich-kontúr menti zárt görbén vett integrál határértéke pedig a *Cauchy-féle reziduumtétel* (*Copson* [1935]) értelmében $(N - p)2\pi i$, ahol N a zárt hurkon belüli gyökök, p pedig a pólusok száma (multiplicitással együtt). Mivel $H \to +\infty$, a hurok körbefogja a teljes jobb oldali félsíkot. Ezenkívül megmutatható, hogy a (11) feltétel fennállása esetén $P(\lambda)$ analitikus és reguláris $\aleph$-ben (*Stépán* [1989] 14. o.), ezért $p = 0$. A karakterisztikus függvény stabilitásának feltétele pedig az, hogy egyetlen gyöke se essen a jobb oldali félsíkba, azaz $N = 0$ legyen.

A *4. tételbeli* feltételeknek szemléletes geometriai jelentésük is van. Ha leszúrnánk egy gombostűt a komplex számsíkon az origóba, és lefektetnék egy fonalat zárt hurokban $P(\lambda)|_{\lambda\in(g)}$ kontúrja mentén e síkba, akkor a fonál mindkét irányból többször is megkerülhetné a gombostűt. Ha a fonalhurkot el tudjuk húzni a gombostűtől úgy, hogy nem akad meg benne, akkor $P(\lambda)$ stabil.

A (12) feltételbeli integrál kiszámításával (ami korántsem egyszerű) a következő fontos tételhez jutunk:

5. tétel. (*Stépán* [1989] 26. o.) Tekintsük a (8) lineáris, autonóm késleltetett funkcionál-differenciálegyenletet a (11) feltétellel. Ennek a rendszernek a karakterisztikus függvénye (10) alakú. Definiáljuk a következő valós függvényeket: $R(\omega) \doteq \operatorname{Re} P(i\omega)$ és $W(\omega) \doteq \operatorname{Im} P(i\omega)$, ahol $\omega \in [0;\infty)$. Jelölje továbbá rendre $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_r \geq 0$ és $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_s \geq \geq 0$, $R(\omega)$ és $W(\omega)$ nem negatív valós gyökeit. A (8) késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása akkor és csak akkor stabil, ha

$$\begin{aligned}
&n = 2m,\\
&W(\rho_k) \neq 0, \qquad k = 1,2,\ldots,r,\\
&\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \operatorname{sgn} W(\rho_k) = (-1)^m m;
\end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned}
&n = 2m + 1,\\
&R(\sigma_k) \neq 0, \qquad k = 1,2,\ldots,s - 1,\\
&R(0) > 0,\\
&\sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \operatorname{sgn} R(\sigma_k) + \frac{1}{2}((-1)^s + (-1)^m) + (-1)^m m = 0,
\end{aligned}$$

ahol m nem negatív egész.

Az *5. tétel* alkalmazását szemléletessé teszi, ha konkrét egyenlettípusra vonatkozóan meghatározzuk a stabilitási határhelyzeteket a rendszer paramétereinek függvényében, és ezeket grafikusan ábrázolva *(stabilitási térkép)* körülhatároljuk az aszimptotikusan stabil és instabil tartományokat. Az aszimptotikus stabilitás határgörbéi a paramétertérben (amely gyakran sík, vagy sík metszet) a karakterisztikus függvény tisztán képzetes gyökeinek ábrázolásával határozhatók meg (*Stépán* [1998]). Ennek a módszernek a bemutatásához tekintsük a következő skaláris késleltetett differenciálegyenletet:

$$\ddot{x}(t) = \mu\alpha\, x(t) - \mu\beta\, x(t-\tau), \tag{13}$$

ahol α,β,μ,τ konstans. Vezessük be a következő jelöléseket és változókat:

$$T \doteq \frac{t}{\tau},\quad \dot{g} = \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\tau}\frac{dg}{dT} \doteq \frac{1}{\tau}g',\quad y(T) \doteq x(\tau T),\ A = -\mu\alpha\tau^2 \text{ és } B = -\mu\beta\tau^2. \tag{14}$$

Ekkor a (13) egyenlet, új változókkal és jelölésekkel, a következő alakot ölti:

$$y''(T) + Ay(T) = By(T-1). \tag{15}$$

A (15) egyenlet $y \equiv 0$ egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálata ekvivalens a (13) egyenlet $x \equiv 0$ egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálatával. A (15) egyenlet karakterisztikus függvénye: $P(\lambda) = \lambda^2 + A - Be^{-\lambda}$, amely ha $\lambda = i\omega$, $(i = \sqrt{-1})$, tiszta képzetes és $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\sin(\omega)$, akkor a következő alakban írható:

$$P(i\omega) = -\omega^2 + A - B(\cos(\omega) - i\sin(\omega)),$$

ahol ω a rendszer *sajátfrekvenciája*.

A tisztán képzetes gyököket úgy határozhatjuk meg, hogy megoldjuk a következő, a *5. tételben* bevezetett jelölésekkel felírt egyenletrendszert:

$$R(\omega) = 0 \qquad W(\omega) = 0. \tag{16}$$

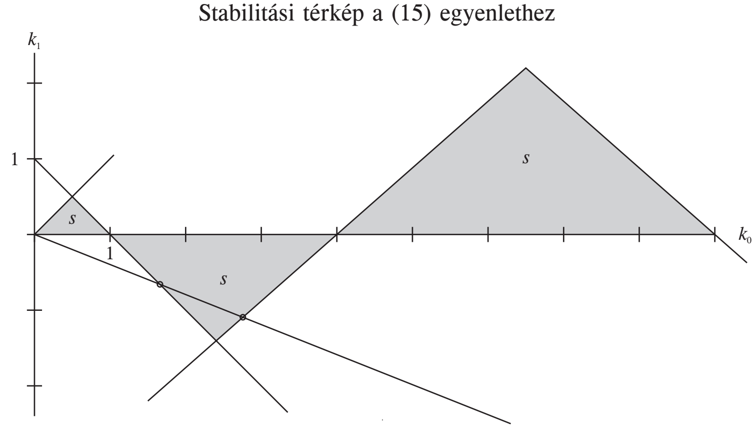
A (15) egyenlet esetében ez a következőképpen alakul:

$$R(\omega) = -\omega^2 + A - B\cos\omega = 0,$$
$$W(\omega) = B\sin(\omega) = 0.$$

Ennek megoldása a paraméterekre nézve: $B = 0$ és $A > 0$; vagy $(-1)^j B = A - j^2\pi^2$ és $\omega = j\pi$, $j = 0,1,2,\ldots$. Ha $\frac{A}{\pi^2} \doteq k_0$ és $\frac{B}{\pi^2} \doteq k_1$, akkor az *5. tétel* alapján megrajzolható a rendszer stabilitási térképe (az *1. ábrán* S jelöli a stabil tartományokat).

1. ábra

Stabilitási térkép a (15) egyenlethez



Ciklikusan visszatérő, növekvő stabil tartományok, amelyekbe belemetsz egy speciális paraméterek esetén adódó, egyenletre jellemző egyenes.

Tegyük fel, hogy $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\mu > 0$ és $\tau > 0$. Ekkor a $k_1 = \frac{\beta}{\alpha}k_0$ egyenes negatív meredekségű, azaz az *1. ábrán* látható módon helyezkedik el. Az ábráról leolvasható, hogy az egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikus stabilitásának szükséges feltétele, hogy

$|\beta| < 0{,}6|\alpha|$ legyen, mert a rendszer paramétereit megjelenítő egyenes csak ebben az esetben metsz bele legalább egy stabil tartományba. Ha ez a feltétel teljesül, akkor az egyenes és a határgörbék metszéspontjainak meghatározásával megadható a (13) egyenlet $x \equiv 0$ egyensúlyi pontjának lokálisan aszimptotikus stabilitási feltétele (szükséges és elégséges):

$$|\beta| < 0{,}6|\alpha| \text{ és } \frac{(h+1)\pi}{\sqrt{-(\alpha+(-1)^h\beta)}} > \tau > \frac{h\pi}{\sqrt{-(\alpha+(-1)^{h+1}\beta)}},$$

ahol $h = 2j + 1$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Hasonló, késleltetett rendszerek vizsgálatánál problémát okozhat, hogy többváltozós esetben általában nem adható zárt alakban szükséges és elégséges feltétel az egyensúlyi megoldás aszimptotikus stabilitására, mint az imént tárgyalt egyváltozós esetben. Ennek oka, hogy a karakterisztikus függvény determinánsának kifejtése n-ed, illetve $(n - 1)$-ed fokú transzcendens egyenletekhez vezet. Tekintsük a következő lineáris késleltetett differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t-\tau), \tag{17}$$

ahol $\mathbf{L}$ és $\mathbf{K}$ egy-egy $n \times n$-es konstans mátrix. Ekkor a karakterisztikus függvény a következő alakot ölti:

$$P(\lambda) = \det\left(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{L} + \mathbf{K}e^{-\lambda\tau}\right) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j\lambda^j e^{-(n-j)\lambda\tau} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-k\lambda\tau}. \tag{18}$$

A (18) függvényből adódó (16) egyenletrendszer megoldása, amely a szükséges és elégséges stabilitási feltételt megadná, gyakran csak numerikusan oldható meg. Konstruálhatunk azonban zárt alakú, elégséges feltételt az egyensúlyi pont aszimptotikus stabilitására. Ennek szemléltetésére vizsgáljunk meg egy kétváltozós esetet, azaz a (17)-ben legyen $\mathbf{L}$ és $\mathbf{K}$ 2×2-es konstans mátrix. Ekkor

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{L} + \mathbf{K}e^{-\lambda\tau}) = \lambda^2 + A\lambda + B\lambda e^{-\lambda\tau} + Ce^{-\lambda\tau} + De^{-2\lambda\tau} + E, \tag{19}$$

ahol $A, B, C, D, E \in R$. Ha elvégezzük a $\lambda = i\omega$, $(i = \sqrt{-1})$ helyettesítést, akkor

$$R(\omega) = -\omega^2 + B\omega\sin(\omega\tau) + C\cos(\omega\tau) + D\cos(2\omega\tau) + E$$
$$W(\omega) = A\omega + B\omega\cos(\omega\tau) - C\sin(\omega\tau) - D\sin(2\omega\tau).$$

Vizsgáljuk meg az $R(\omega) = 0$ egyenlet gyökeit. Ha $E > 0$, akkor $R(0) > 0$, ezért az $R(\omega) = 0$ egyenletnek van páratlan számú pozitív valós gyöke, azaz $r = 2l + 1$, ahol $l = 0,1,\ldots$ és $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_r \geq 0$ jelöli e gyököket (a *5. tétel* jelöléseinek megfelelően).

A következő függvények $R(\omega)$-ra és $W(\omega)$-ra alsó becslést adnak: $R_a(\omega) = -\omega^2 - |B|\omega - |C| - |D| + E \leq R(\omega)$ és $W_a(\omega) = (A - |B|)\omega - |C| - |D| \leq W(\omega)$, $\forall\omega > 0$.

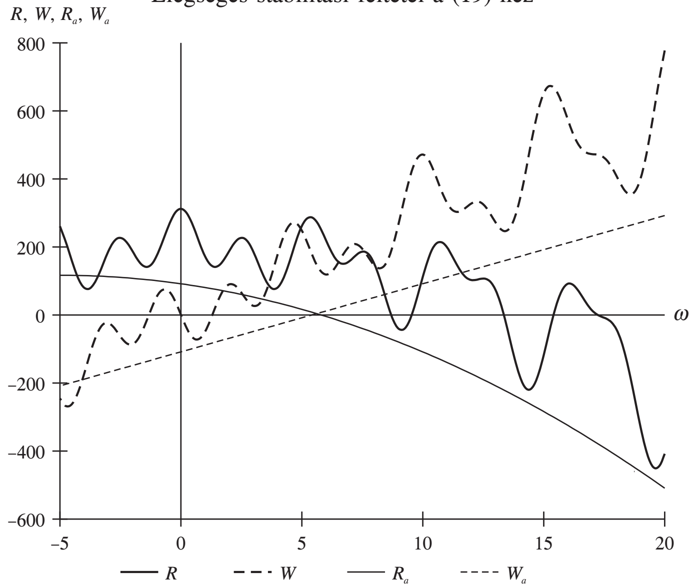
Ha E > 0 és $E > |C| + |D|$, akkor $R_a(\omega)$ alulról konkáv függvénynek van pozitív, valós gyöke, amely kisebb vagy egyenlő, mint $R(\omega)$ bármelyik pozitív valós gyöke. Ha $A > 0$ és $A - |B| > 0$, akkor $W_a(\omega)$ pozitív meredekségű lineáris függvény, amelynek van nem negatív valós gyöke. Ha ezenkívül a

$$\frac{|C|+|D|}{A-|B|} < \frac{-|B|+\sqrt{B^2-4(|C|+|D|-E)}}{2}$$

feltétel is teljesül, akkor $W_a(\omega)$ nem negatív valós gyöke kisebb, mint $R_a(\omega)$ bármelyik pozitív valós gyöke. Mivel $W_a(\omega)$ monoton növekvő, $R_a(\omega)$ pedig a jobb félsíkban csökkenő függvény, ezért ahol $R_a(\omega) = 0$, ott $W_a(\omega)$ értéke pozitív. Ebből következik, hogy ahol $R_a(\omega) = 0$, ott $W(\omega) > 0$, $\forall\omega > 0$-ra.

2. ábra

Elégséges stabilitási feltétel a (19)-hez



A karakterisztikus függvény valós (R) és képzetes (W) részére alsó becslést adva (R_a és W_a), majd ezeket ω függvényében ábrázolva, konstruálható analitikusan elégséges stabilitási feltétel a (19)-hez.

Mindezek miatt $\sum_{k=1}^{3}(-1)^k \operatorname{sgn} W(\rho_k) = -1$, vagyis a *5. tétel* értelmében, a (17) egyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ egyensúlyi pontjának lokális aszimptotikus stabilitásához elégséges feltétel:

$$A > 0, \qquad E > 0, \qquad A - |B| > 0, \qquad E > |C| + |D|$$

és

$$\frac{|C| + |D|}{A - |B|} < \frac{-|B| + \sqrt{B^2 - 4(|C| + |D| - E)}}{2}.$$

Eddig a lokális stabilitást a karakterisztikus egyenlet alapján vizsgáltuk. Általánosítsuk most az – eredetileg szintén közönséges differenciálegyenletekre kidolgozott – Ljapunov-függvények módszerét késleltetett funkcionál-differenciálegyenletekre.

6. tétel. (*Hale* [1977] 105. o.) Legyen $V : R \times C([-r,0],R^n) \to R$ folytonos (*Ljapunov-funkcionál*) és $\mathbf{x}(t,\sigma,\varphi)$ a (6) késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet megoldása a (7) kezdeti feltétellel. Definiáljuk V-nek a (6) rendszer szerinti deriváltját a következőképpen:

$$\dot{V}_{(6)}(t,\varphi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h, \mathbf{x}_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)].$$

Ekkor ha léteznek $u,v,w : R_+ \to R_+$ nem csökkenő függvények úgy, hogy $u(s), v(s) > 0$, ha $s > 0$ és $u(0) = v(0) = 0$, valamint

$$u(|\varphi(0)|) \le V(t,\varphi) \le v(|\varphi|),$$

$$\dot{V}_{(6)}(t,\varphi) \le -w(|\varphi(0)|),$$

akkor az $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}_t)$ késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása lokálisan aszimptotikusan stabil.

Az egyensúlyi pontok lokális stabilitási tulajdonságai után, ha megvizsgáljuk a teljes tér struktúráját, akkor a nemlineáris rendszer globális stabilitására vonatkozóan is vonhatunk le következtetéseket. Például autonóm rendszerek esetében, mint

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}_t), \tag{20}$$

a Ljapunov-funkcionál speciális formáját használhatjuk, mivel a rendszer explicit módon nem függ az időtől. Ha a triviális egyensúlyi pont stabilitása mellett a megoldások korlátosak és az origó „vonzó” pont, akkor a globális stabilitás is fennáll, hasonlóan ahhoz, amit a késleltetés nélküli esetben tapasztaltunk. Erről szól a következő állítás:

7. tétel. (*Hale* [1977] 119. o.) Legyen $V : C([-r,0],R^n) \to R$ folytonos *(Ljapunov-funkcionál)* és $a(r),b(r)$ nem negatív függvények úgy, hogy $a(r) \to \infty$, ha $r \to \infty$. Ha

$$a(|\,\text{ö}(0)\,|) \le V(\text{ö}) \ \text{ és } \ \dot{V}_{(20)}(\text{ö}) \le -b(|\,\text{ö}(0)\,|),$$

akkor a (20) autonóm késleltetett funkcionál-differenciálegyenlet $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ triviális megoldása Ljapunov-értelemben stabil, és minden megoldás korlátos. Ha az előző feltételek mellett $b(r)$ pozitív definit, akkor minden megoldás $\mathbf{x} = \mathbf{0}$-hoz tart, ha $t \to \infty$, azaz a rendszer globálisan stabil.

Az előző állítás alkalmazásához vizsgáljuk meg a következő skaláris egyenletet:

$$\dot{x}(t) = Ax^3(t) + Bx^3(t-r), \tag{21}$$

ahol A és B konstans és $A \neq 0$. Ha $V(\phi) \doteq -\dfrac{\phi^4(0)}{2A} + \displaystyle\int_{-r}^{0} \phi^6(\theta)d\theta$, akkor $\dot{V}_{(21)}(\phi) = -\Big[\phi^6(0) +$

$+\dfrac{2B}{A}\phi^3(0)\phi^3(-r) + \phi^6(-r)\Big]$, amely egy kvadratikus forma. Ha például $A < 0$ és $|B| \le |A|$,

akkor $V(\phi) \ge \dfrac{\phi^4(0)}{2|A|}$ és $\dot{V}(\phi) \le -[\phi^3(0) + \phi^3(-r)]^2$, ezért az előző *7. tétel* értelmében a (21) rendszer globálisan stabil.

2. megjegyzés. A *7. tételben* a $b(|\,\text{ö}(0)\,|)$ függvény helyén más argumentumú pozitív definit függvény, vagy funkcionál is állhat. A fontos csak az, hogy a $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \langle \mathbf{grad}V; \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle = \langle \mathbf{grad}V; f(\mathbf{x}_t)\rangle$ skaláris szorzatban szereplő két vektor geometriai helyzete „kikényszerítse” az aszimptotikus stabilitást.

Áralkalmazkodás késleltetéssel

Vizsgáljuk meg a késleltetést is tartalmazó (3) áralkalmazkodási szabályt! Természetesen ez a modell az időkésleltetés komplex jelenségét leegyszerűsített formában tárgyalja. Az áralkalmazkodási folyamat pontosabb megközelítése érdekében olyan egyenletet is vizsgálhatnánk, amelyben a kereslet is némi késéssel reagál a kapott információra, amelyet kizárólag az árak hordoznak, azaz $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t-\tau_1)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau_2))$. Ekkor azonban, ha feltennénk, hogy $\tau_1 < \tau_2$, vagyis a fogyasztói döntés meghozatala és megvalósítása rövidebb időt igényel, mint a termelői döntésé, akkor megfelelő transzformációval (*Hale* [1977] 104. o.) a (3) típusú egyenlethez jutnánk. Ha olyan modellt építenénk, amelyben az egyes jószágokhoz különböző késleltetési idő tartozik, azaz $\dot{p}_i = \mu_i Z_i(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t-\tau_i))$, $i = 1,\ldots,n$, akkor az előző alfejezetben ismertetett tételek érvényességi köre lényegesen nem változna, csak az elemzési technika lenne bonyolultabb. Mivel ebben a tanulmányban a késleltetést is tartalmazó és késleltetés nélküli gazdaságok kvalitatív tulajdonságainak különbségeire kívánjuk helyezni a hangsúlyt, maradunk a (3) típusú áralkalmazkodási egyenlettel jellemezhető gazdaságok vizsgálatánál.

Egytermékes gazdaság

Kezdjük vizsgálatunkat az egytermékes gazdaság vagy izolált piac elemzésével ugyanolyan kiinduló feltételekkel, mint azt a késletetés nélküli esetben tettük! Ekkor, mint azt a következő állításban megmutatjuk, a késleltetés destabilizálja a rendszert.

8. tétel. Jelölje $\alpha \doteq \dfrac{dD(p^0)}{dp}$, $\beta \doteq \dfrac{dS(p^0)}{dp}$ a (saját) ár szerinti deriváltakat a p^0 egyensúlyi pontban. Ekkor a $\dot{p}(t) = \mu D(p(t)) - \mu S(p(t-\tau))$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett, egytermékes gazdaságban a p^0 egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $|\beta| < |\alpha|$, vagy ha $|\beta| > |\alpha|$ és

$$\tau < \frac{\arccos\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}{\mu\beta\sqrt{1-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}}}.$$

Bizonyítás. Az *1. megjegyzés* miatt tekintsük a p^0 egyensúlyi pont kis környezetében linearizált, transzformált egyenletet a *5. tétel* jelöléseivel:

$$\dot{x}(t) = \mu\alpha\, x(t) - \mu\beta\, x(t-\tau). \tag{22}$$

Felhasználva a (14)-ben bevezetett új változókat és jelöléseket, a (22) egyenlet a következő alakban írható:

$$y'(T) + A\,y(T) + B\,y(T-1) = 0. \tag{23}$$

Látható, hogy a (23) egyenlet $y \equiv 0$ és a $\dot{p}(t) = \mu Z(p(t), p(t-\tau))$ egyenlet $p(t) \equiv p^0$ egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálata ekvivalens.

A (23) egyenlet karakterisztikus polinomja: $P(\lambda) = \lambda + A + Be^{-\lambda}$. Határozzuk meg a stabilitási határhelyzeteket, vagyis az előző alfejezetben ismertetett módszernek megfelelően vizsgáljuk meg a tisztán képzetes gyököket, és írjuk fel a (16)-nak megfelelő egyenletrendszert. Mivel $P(i\omega) = i\omega + A + B(\cos(\omega) - i\sin(\omega))$, ezért

$$\begin{aligned} R(\omega) &= A + B\cos(\omega) = 0 \\ W(\omega) &= \omega - B\sin(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

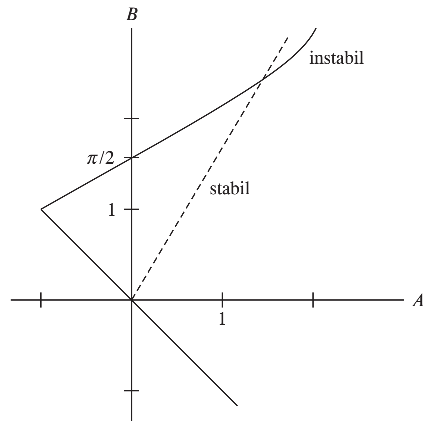
A (24) egyenletrendszer megoldása után megrajzolhatjuk a rendszer stabilitási térképét. Mivel $A = -\mu\tau\alpha$ és $B = \mu\tau\beta$, ezért

$$B = -\frac{\beta}{\alpha}A, \tag{25}$$

amely az $\alpha < 0$ kiinduló feltétel miatt pozitív meredekségű egyenes. Látható, hogy amennyiben $|\beta| < |\alpha|$, akkor a (25) egyenes a stabil tartományban marad *(3. ábra)*. Ha $|\beta| > |\alpha|$, akkor a (25) egyenesnek a felső határgörbével pontosan egy metszéspontja van. A (24)–(25) egyenletrendszer megoldásával tehát meghatározható a metszésponthoz tartozó, kritikus késleltetési idő: τ_c.

Ha a $|\beta| > |\alpha|$ feltétel fennáll, a stabilitási térképről leolvasható, hogy pontosan akkor maradunk a stabil tartományban, ha

3. ábra
Stabilitási térkép a (23) egyenlethez



Ha a vizsgált egyenletet jellemző (25) egyenes meredeksége egynél kisebb, akkor az egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil. Ha egynél nagyobb, akkor a határgörbével való metszéspontból meghatározható egy kritikus késleltetési érték az aszimptotikus stabilitás megőrzéséhez.

$$\tau < \tau_c = \frac{\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\mu\beta\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}}. \blacksquare$$

A kapott stabilitási feltételekből látható, hogy a késleltetést is tartalmazó, (3) áralkalmazkodási szabállyal jellemzett egytermékes gazdaságban, az egyensúlyi pontban, ha a kereslet árérzékenységére jellemző $|\alpha|$ konstans kisebb, mint a kínálat árérzékenységére jellemző $|\beta|$ konstans, a stabilitás megőrzéséhez az időkésleltetés hosszának egy bizonyos érték alatt kell maradnia. Ez azt jelenti, hogy ha az ár okozta „kismértékű” keresleti változásokra a kínálat „nagymértékű” változásokkal, de késéssel reagál, akkor az egyensúlyi ár stabilitása veszélybe kerül. Ha azonban a kínálat árérzékenysége kisebb, mint a keresleté, azaz $|\beta| < |\alpha|$, akkor a késleltetés nem befolyásolja a stabilitási tulajdonságokat.[2]

Továbbra is egytermékes gazdaságnál maradva, vizsgáljunk meg egy speciális esetet! A következő egyenlettel azt próbáltuk modellezni, hogy a kínálati oldal szereplői – speciális, időbeli információs aszimmetria esetén – döntéseiket bizonyos időpontokban (mintavételezés-szerű eljárással) szerzett információkra alapozzák. Mindez annak a jelenségnek az absztrakciója, amikor a vállalatok például havonta tartanak piackutatásokat, vagy negyedéves statisztikai publikációkat vesznek figyelembe és döntéseik információs bázisát csak ezek az adatok képezik. Ekkor egy kevert, *folytonos-diszkrét idejű rendszer*t kell vizsgálnunk:

[2] Mindezek a stabilitási feltételek nagymértékben függnek az áralkalmazkodási szabály megválasztásától. A már említett Bródy-féle egyenlet késleltetett, egytermékes változata $\ddot{p}(t) = \mu D(p(t)) - \mu S(p(t-\tau))$ például késleltetés nélkül állandóan a stabilitás határán mozog (ciklikus). Késleltetéssel viszont bizonyos tartományokban stabilizálható, ugyanis linearizált, transzformált változata (15) alakú. Mint láttuk, ekkor különböző stabilitási intervallumok adhatók a késleltetés hosszára, és nem csupán egy maximális érték.

$$\dot{p}(t) = \mu D(p(t)) - \mu S(p(t_j)),\ \text{ahol}\ t_j = j\Delta t,\ j = 0,1,2,3,\ldots \tag{26}$$

A fenti kínálati függvényben szereplő ár a $t \in [t_j;t_{j+1})$ intervallumon konstans, Δt pedig a két információszerzési időpont között eltelt időt jelenti. A (26) rendszer stabilitási tulajdonságait a *9. tétel* jellemzi.

9. tétel. Tekintsük a (26) áralkalmazkodási szabállyal jellemzett egytermékes gazdaságot az előző *8. tétel* feltételeivel és jelöléseivel. Ekkor a gazdaság p^0 egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $|\beta| < |\alpha|$, vagy ha $|\beta| > |\alpha|$ és

$$t_{j+1} - t_j = \Delta t < \frac{1}{\alpha\mu} \ln\left(\frac{1 + \dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - 1} \right). \tag{27}$$

Bizonyítás. Az előző *8. tétel* bizonyításában látottakhoz hasonlóan tekintsük a (26) egyenlet p^0 egyensúlyi pontja kis környezetében linearizált, transzformált változatát:

$$\dot{x}(t) = \mu\alpha\, x(t) - \mu\beta x(t_j). \tag{28}$$

Mivel $x(t)$ a $t \in [t_j;t_{j+1})$ intervallumon konstans, a (28) kifejezés ugyanezen az intervallumon inhomogén, lineáris differenciálegyenlet. Megoldása tehát felírható a homogén és partikuláris megoldások összegeként:

$$x(t) = Ke^{\mu\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} x(t_j),\ \text{ahol}\ K \in R,\ t \in [t_j;t_{j+1}),\ j = 0,1,2,3,\ldots \tag{29}$$

További természetes feltétel, hogy az intervallumok végpontjaiban a (29) megoldás folytonos maradjon. Ezzel a feltétellel a K konstans meghatározható:

$$x(t_j) = Ke^{\mu\alpha t_j} + \frac{\beta}{\alpha} x(t_j) \quad \Rightarrow \quad K = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\mu\alpha t_j} x(t_j). \tag{30}$$

A (30) kifejezést a (29) egyenletbe helyettesítve, a megoldás a következő alakot ölti:

$$x(t) = \left[\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\mu\alpha(t - t_j)} + \frac{\beta}{\alpha}\right] x(t_j)\,. \tag{31}$$

A (31) alakú megoldást a t_{j+1} időpontban felírva, és az intervallum hosszát ($\Delta t = t_{j+1} - t_j$) is felhasználva a következő egyenlethez jutunk:

$$x(t_{j+1}) = \left[\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\mu\alpha\Delta t} + \frac{\beta}{\alpha}\right] x(t_j)\,. \tag{32}$$

A (32) kifejezés egy lineáris differenciaegyenlet, amelynek $x = 0$ fixpontja akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha az általa generált mértani sorozat konvergens (*Simonovits* [1998] 32. o.), azaz

$$\left| \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\mu\alpha\Delta t} + \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1.$$

Ha $|\beta| < |\alpha|$, akkor a (32) sorozat konvergens $\Delta t > 0$-ra, és ez éppen az állítás első fele. Ha $|\beta| > |\alpha|$, akkor a (32) sorozat konvergenciájának, így az eredeti (26) áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaság p^0 egyensúlyi pontjának lokálisan aszimptotikus stabilitásának is, szükséges és elégséges feltétele:

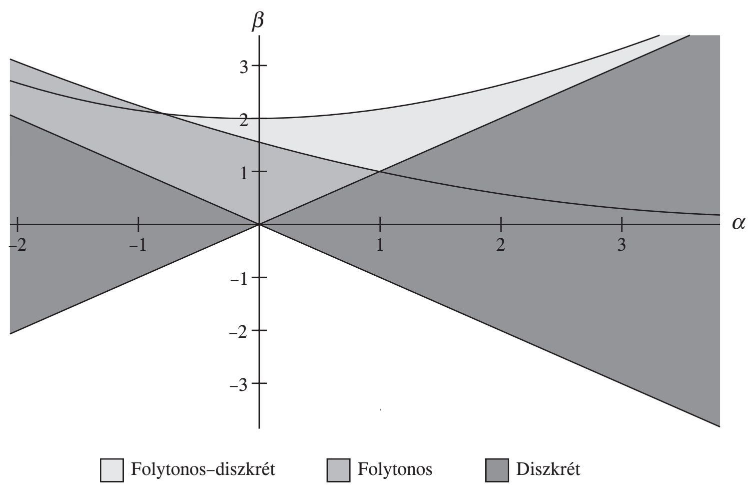
$$0 < \Delta t < \frac{1}{\mu\alpha} \ln\left(\frac{1 + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} \right). \blacksquare$$

Az *9. tételben* adott stabilitási feltételekből látható, hogy ha két információszerzési időpont (például piackutatás vagy statisztikai publikáció) között eltelt idő egy kritikus értéknél hosszabb, akkor az egyensúlyi ár instabillá válhat. A tisztán folytonos, *8. tételben* tárgyalt esettel összehasonlítva a stabilitási feltételek hasonlók. A kereslet és kínálat árérzékenységére vonatkozó $|\beta| < |\alpha|$, elégséges stabilitási feltétel azonos. Az egyetlen különbség, hogy a késleltetés maximális hosszát az első esetben egy trigonometrikus kifejezés, a másodikban pedig egy logaritmikus kifejezés adja meg.

A tisztán folytonos idejű $\dot{x}(t) = \mu\alpha\, x(t) - \mu\beta\, x(t-\tau)$ egyenlet, a „kevert” folytonos–diszkrét idejű (26) egyenlet, valamint a tisztán diszkrét idejű pókhálómodell[3] stabilitási feltételeit a paraméterek függvényében a *4. ábra* szemlélteti. Annak érdekében, hogy az eddigiekben tárgyalt modellek és a tisztán diszkrét idejű modell, amelyben $t = 0,1,2,\ldots$, összehasonlítható legyen, a $\tau = \Delta t = 1$ és $\mu = 1$ esetben ábrázoltuk α és β paraméterek összefüggéseit. A három azonos jelenséget leíró, de különböző modellben a stabilitási feltételekben tapasztalható eltérések felhívják a figyelmet a folytonos és diszkrét időkezelés különbségeire.

4. ábra

Stabilitási feltételek a paraméterek függvényében



A tisztán folytonos, a kevert folytonos–diszkrét és a tisztán diszkrét (pókhálómodellbeli) időkezelés esetén adódott aszimptotikusan stabil tartományok az α és β paraméterekre nézve ($\tau = \Delta t = 1$ és $\mu = 1$).

[3] *Ezekiel* [1938] lineáris pókhálómodelljét tekinthetjük egy diszkrét, nemlineáris modell egyensúly körül linearizált változatának. Ebben a mi jelöléseinkkel a kereslet és a kínálat: $D_t = \mu\alpha\, p_t$ és $S_t = \mu\beta\, p_{t-1}$. Az egyensúlyban $D_t = S_t$, ezért $p_t = \frac{\beta}{\alpha} p_{t-1}$. Az aszimptotikus stabilitás feltétele tehát: $|\beta| < |\alpha|$.

Többtermékes gazdaság

Térjünk át az általánosabb, többtermékes gazdaság vizsgálatára! Az egyváltozós eset elemzése világosan kimutatta, hogy a késleltetésnek destabilizáló hatása van a gazdaságra. Az egyensúlyi pont lokális, így a globális stabilitási feltételei is kibővültek a késleltetés nélküli esethez képest. Többváltozós esetben a helyzet nem ennyire egyszerű. Tekintsük először az egyensúlyi pont lokális stabilitásának kérdését, előbb azonban vezessünk be néhány jelölést.

Jelölje a keresleti és kínálati függvények megfelelő ár szerinti parciális deriváltjait a $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontban, valamint az ezeket tartalmazó $n \times n$-es mátrixokat:

$$\frac{\partial D_i(\mathbf{p}^0)}{\partial p_j} = d_{ij}, \qquad \frac{\partial S_i(\mathbf{p}^0)}{\partial p_j} = s_{ij}, \qquad [d_{ij}] = \mathbf{D}_0, \qquad [s_{ij}] = \mathbf{S}_0, \tag{33}$$

ezenkívül bármely $\mathbf{p}$ pontban ugyanezen parciális deriváltak mátrixait $\mathbf{D}_p$ és $\mathbf{S}_p$.

Legyen továbbá:

$$\begin{aligned} A &= -\mu_1 d_{11} - \mu_2 d_{22},\ B = \mu_1 s_{11} - \mu_2 s_{22}, \\ C &= \mu_1 d_{12}\mu_2 s_{21} + \mu_1 s_{12}\mu_2 d_{21} - \mu_1 s_{11}\mu_2 d_{22} - \mu_1 d_{11}\mu_2 s_{22}, \\ D &= \mu_1 s_{11}\mu_2 s_{22} - \mu_1 s_{12}\mu_2 s_{21} \text{ és} \\ E &= \mu_1 d_{11}\mu_2 d_{22} - \mu_1 d_{12}\mu_2 d_{21}. \end{aligned}$$

Mint az előző alfejezetben láthattuk, több változó szerepeltetésével általában nem adható zárt alakban szükséges és elégséges feltétel az egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikus stabilitására. Ha ugyanis tekintjük a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MZ}(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t-\tau)) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau))$ típusú áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaságot, a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^0$ egyensúlyi pont stabilitási tulajdonságait – az *1. megjegyzésnek* megfelelően – elemezhetjük az egyensúlyi pont kis környezetében linearizált, transzformált

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{MD}\,\mathbf{x}(t) - \mathbf{MS}\,\mathbf{x}(t-\tau) \tag{34}$$

egyenlet, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálatával. A (34) egyenletnek megfelelő karakterisztikus függvény (18) alakú. Ennek megoldása, így gyökeinek elemzése is, analitikus eszközökkel csak meglehetősen ritkán lehetséges. Ebben a tanulmányban, mint említettük, az analitikus technikákra kívánjuk helyezni a hangsúlyt, ezért nem térünk ki a numerikus megoldhatóság és megoldás részleteire.

Az előző alfejezetben azonban láthattuk azt is, hogy bizonyos esetekben adható analitikus úton is elégséges feltétel az egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikus stabilitására. Erről szól a *10. tétel.*

10. tétel. Ha $A > 0, \quad E > 0, \quad A - |B| > 0, \quad E > |C| + |D|$ és

$$\frac{|C|+|D|}{A-|B|} < \frac{-|B|+\sqrt{B^2-4(|C|+|D|-E)}}{2},$$

akkor a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau))$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett kéttermékes gazdaságban a $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikusan stabil, minden $\tau > 0$ késleltetési érték mellett.

Bizonyítás. Tekintsük az áralkalmazkodási szabály $\mathbf{p}^0$ környezetében transzformált, linearizált változatát, amely (34) alakú. Ennek karakterisztikus függvénye (19) alakú, amely stabilitásának elégséges feltételei az előző alfejezetben tárgyaltaknak megfelelően éppen megegyeznek a tételben adottakkal. ■

Látható, hogy a késleltetés nélküli eset stabilitási feltételeihez képest az *10. tételben* adottak jóval erősebbek, de az elégséges kritérium analitikusan itt is meghatározható. Kettőnél több termék esetén azonban a karakterisztikus függvény gyökeinek vizsgálatával általános elégséges feltétel sem adható analitikus úton. Alkalmazzuk tehát az előző alfejezetben tárgyalt másik technikát, a Ljapunov-funkcionálok módszerét, amellyel konstruálható elégséges stabilitási feltétel. A következő állítás ehhez a módszerhez kapcsolódik.

11. tétel. Tegyük fel, hogy $d_{ij} \geq 0$ és $s_{ij} \leq 0$, ha $i \neq j$ és $i,j = 1,\dots,n$, azaz egyfajta „erős" (de nem feltétlenül általános) helyettesíthetőségi feltétel teljesül az egyensúlyi pontban; valamint hogy $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_0$ mátrix sajátértékeinek van negatív valós része, és $\mathbf{D}_0^T + \mathbf{D}_0 \doteq -\mathbf{H}$, ahol $\mathbf{H}$ pozitív definit mátrix. Ekkor ha

$$\min_{i=1,\dots n} |d_{ii}| \left(\min_{i=1,\dots n} |d_{ii}| - 2(n-1) \max_{\substack{i,j=1,\dots n \\ i\neq j}} |d_{ij}| \right) > n^2 \left(\max_{i,j=1,\dots n} |s_{ij}| \right)^2, \tag{35}$$

akkor a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau))$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaság $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. Tekintsük ismét a vizsgálandó egyenlet $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontja kis környezetében linearizált, transzformált változatát, amely a korábbi jelölésekkel (34) alakú. Jelölje $\mathbf{x}(t,\sigma,\text{ö})$ a (34) egyenlet megoldását a σ-beli **ö** kezdeti feltétellel. Definiáljuk az $\mathbf{E}$, $n \times n$-es mátrixot, amelynek fődiagonálisában a $-d_{ii}$, $i = 1,2,\dots,n$ elemek vannak, a többi eleme pedig zérus. Ekkor megmutatjuk, hogy

$$V(t,\text{ö}) = \text{ö}^T(0)\mathbf{M}^{-1}\text{ö}(0) + \int_{-\tau}^{0} \text{ö}^T(\theta)\mathbf{E}\text{ö}(\theta)d\theta \tag{36}$$

a (34) rendszerhez tartozó Ljapunov-funkcionál.

Ha ugyanis $\mathbf{D}_0^T + \mathbf{D}_0 \doteq -\mathbf{H}$ és $\mathbf{S}_0^T + \mathbf{S}_0 \doteq -\mathbf{G}$, akkor felírható a (36) kifejezés (34) rendszer szerinti deriváltja:

$$\dot{V}_{(24)}(t,\text{ö}) = -\text{ö}^T(0)\mathbf{H}\,\text{ö}(0) + \text{ö}^T(0)\mathbf{G}\,\text{ö}(-\tau) + \text{ö}^T(0)\mathbf{E}\,\text{ö}(0) - \text{ö}^T(-\tau)\mathbf{E}\,\text{ö}(-\tau). \tag{37}$$

A (37) kifejezés értéke a kiinduló feltételeknek megfelelően negatív, ha a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}-\mathbf{E} & \frac{1}{2}\mathbf{G} \\ \frac{1}{2}\mathbf{G} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{38}$$

blokkmátrix pozitív definit.

Keressünk alsó becslést a $\mathbf{y}^T[\mathbf{H}-\mathbf{E}]\mathbf{y}$ és $\mathbf{y}^T\mathbf{E}\,\mathbf{y}$ kifejezésekre, ahol $\mathbf{y} \in R^n$ tetszőleges vektor. Felhasználva, hogy $2\sum y_i y_j \leq \sum(y_i^2 + y_j^2)$, valamint $d_{ii} < 0$, $\forall i$-re és $d_{ij} > 0$, $i \neq j$-re, kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}^T[\mathbf{H}-\mathbf{E}]\mathbf{y} = -\sum_{i=1}^{n} d_{ii}y_i^2 - \sum_{i\neq j}(d_{ij}+d_{ji})y_i y_j \geq (\min|d_{ii}| - 2(n-1)\max|d_{ij}|)\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \doteq \vartheta\,|\mathbf{y}|^2$$

és

$$\mathbf{y}^T\mathbf{E}\,\mathbf{y} = -\sum_{i=1}^{n} d_{ii}y_i^2 \geq (\min|d_{ii}|)\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \doteq \eta\,|\mathbf{y}|^2, \text{ ahol } \vartheta,\eta \in R.$$

Ekkor látható, hogy $\dot{V}_{(34)}(t,\text{ö}) \leq -\vartheta|\text{ö}(0)|^2 + \|\mathbf{G}\|\,|\text{ö}(0)|\,|\text{ö}(-\tau)| - \eta|\text{ö}(-\tau)|^2$ és ha

$$\vartheta\eta - \frac{1}{4}\|\mathbf{G}\|^2 > 0, \tag{39}$$

akkor létezik $k > 0$ pozitív valós szám, amelyre $\dot{V}_{(34)}(t,\text{ö}) \le -k(|\text{ö}(0)| - |\text{ö}(-\tau)|)^2$, bármely $\tau > 0$-ra. Mivel $\|\mathbf{G}\| \le 2n \max\limits_{i,j=1,\dots n} |s_{ij}|$, ezért ha

$$\min_{i=1,\dots n} |d_{ii}| \left(\min_{i=1,\dots n} |d_{ii}| - 2(n-1) \max_{\substack{i,j=1,\dots n \\ i \ne j}} |d_{ij}| \right) > n^2 \left(\max_{i,j=1,\dots n} |s_{ij}| \right)^2,$$

akkor a (39) feltétel teljesül.

Ezenkívül mivel $\mathbf{E}$ pozitív definit mátrix, ezért léteznek olyan $v, K \in R$ pozitív számok, hogy $v\,|\text{ö}(0)|^2 \le V(\text{ö}) \le K\,|\text{ö}|^2$, tehát $V(t,\text{ö})$ a (34) rendszerhez tartozó Ljapunov-funkcionál. Ekkor az előző alfejezetben ismertetett *6. tételnek* megfelelően a (34) egyenlet triviális megoldása, így a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau))$ áralkalmazkodási szabállyal jellemzett gazdaság $\mathbf{p}^0$ egyensúlyi pontja lokálisan aszimptotikusan stabil. ■

Az előző tételben szereplő (35) feltétel meglehetősen szigorú, de viszonylag könnyen ellenőrizhető elégséges feltétel. Az egytermékes gazdasághoz hasonlóan a kereslet árérzékenységének dominanciáját követeli meg a kínálatéval szemben. Ezen belül megköveteli még a sajátár-hatások dominanciáját, a többi termék árhatásaival szemben, amely újdonság az előzőekhez képest. A (35) feltételen kívül felhasználtuk a tételben definiált „erős” helyettesíthetőség feltételét, amely a késleltetés nélküli gazdaságokhoz képest, a nem helyettesítés esetét kivéve, szintén újabb megszorításokat jelent.

Hasonlóan a késleltetés nélküli esethez, az egyensúlyi pont körüli linearizált rendszer lokális stabilitásából nem következtethetünk a nemlineáris rendszer globális stabilitására. Ennek vizsgálatához újabb megfontolásokra van szükség. Erről szól a *12. tétel,* amelynek bizonyításában messzemenően kihasználjuk, hogy áralkalmazkodási szabályunk autonóm késleltetett funkcionál-differenciálegyenletet generál.

12. tétel. Tegyük fel, hogy az „erős” helyettesíthetőségi feltétel teljesül *minden pontban*, azaz $\dfrac{\partial D_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} \ge 0$ és $\dfrac{\partial S_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} \le 0$, ha $i \ne j$ és $i,j = 1,\dots,n$; valamint hogy $\dfrac{\partial D_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$ és $\dfrac{\partial S_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$ monoton függvények $i,j = 1,\dots,n$ esetén. Tekintsük a $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{MD}(\mathbf{p}(t)) - \mathbf{MS}(\mathbf{p}(t-\tau))$ áralkalmazkodási szabályt. Ebben a rendszerben legyen $\mathbf{p}(t,\sigma,\text{ö})$ megoldás a σ-beli ö kezdeti feltétellel, és válasszuk meg a $\langle \gamma_i \rangle = \tilde{\mathbf{A}} \in R^{n\times n}$ negatív szemidefinit, diagonális mátrix elemeit úgy, hogy az $\mathbf{S}^T(\text{ö}(-\tau))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau)) \ge -2\int_{-\tau}^{0} \mathbf{S}^T(\text{ö}(\theta))\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}(\text{ö}(\theta))\,d\theta$ egyenlőtlenség teljesüljön minden pontban. Ekkor ha

$$4\left(\min_{i=1,\dots,n} |d_{ii}| - (n-1)\max_{i\ne j} |d_{ij}| \right)\left(\min_{i=1,\dots,n} |s_{ii}| - (n-1)\max_{i\ne j} |s_{ij}| - \max_{i=1,\dots,n} |\gamma_i| \right) > \lambda_{\max}, \tag{40}$$

ahol $\lambda_{\max}$ az $[\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p]^T[\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p]$ szorzatmátrix legnagyobb sajátértéke, akkor a gazdaság globálisan aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{E}$ azt az $n \times n$-es, negatív szemidefinit, diagonális mátrixot, amelynek fődiagonálisában a $\gamma_i |\text{arc tg}\,\phi_i(0)|$, $i = 1,2,\dots,n$ elemek vannak, a többi eleme pedig zérus. Ekkor meg fogjuk mutatni, hogy

$$
\begin{aligned}
V(\text{ö}) = \mathbf{D}^T(\tilde{\text{ö}}(0))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}(\tilde{\text{ö}}(0)) + \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(-\tau))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau)) + \\
+\tilde{\text{ö}}^T(0)\mathbf{M}^{-1}\tilde{\text{ö}}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(\theta))\mathbf{E}\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(\theta))d\theta
\end{aligned}
\tag{41}
$$

a (3) rendszerhez tartozó Ljapunov-funkcionál.

Mivel $0 \geq \gamma_i |\arctan(\phi_i(0))| > 2\gamma_i$, ezért a $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixra vonatkozó feltétel, valamint a keresleti függvény nulladfokú homogenitása miatt:

$$
V(\text{ö}) \geq \mathbf{D}^T(\tilde{\text{ö}}(0))\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}(\tilde{\text{ö}}(0)) + \tilde{\text{ö}}^T(0)\mathbf{M}^{-1}\tilde{\text{ö}}(0) \geq a(|\,\tilde{\text{ö}}(0)\,|), \text{ ahol } \lim_{r\to\infty} a(r) = \infty.
$$

Határozzuk meg $V(\text{ö})$-nek a (3) rendszer szerinti deriváltját:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{(3)}(\text{ö}) = \mathbf{D}^T(\text{ö}(0))(\mathbf{D}_p^T + \mathbf{D}_p)\mathbf{D}(\text{ö}(0)) - \mathbf{D}^T(\text{ö}(0))(\mathbf{D}_p^T + \mathbf{D}_p)\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau)) + \\
+ \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(-\tau))(\mathbf{S}_p^T + \mathbf{S}_p)\mathbf{D}(\tilde{\text{ö}}(0)) - \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(-\tau))(\mathbf{S}_p^T + \mathbf{S}_p)\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau)) + \\
+ 2[\mathbf{D}(\tilde{\text{ö}}(0)) - \mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau))]\tilde{\text{ö}}(0) + \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(0))\mathbf{E}\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(0)) - \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(-\tau))\mathbf{E}\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau)).
\end{aligned}
$$

Mivel a Walras-törvény miatt $[\mathbf{D}(\tilde{\text{ö}}(0)) - \mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau))]\tilde{\text{ö}}(0) = 0$, átrendezés után kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{(3)}(\text{ö}) = \mathbf{D}^T(\text{ö}(0))(\mathbf{D}_p^T + \mathbf{D}_p)\mathbf{D}(\text{ö}(0)) + 2\mathbf{D}^T(\text{ö}(0))(\mathbf{S}_p^T + \mathbf{D}_p)\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau)) - \\
- \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(-\tau))(\mathbf{S}_p^T + \mathbf{S}_p + \mathbf{E})\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(-\tau)) + \mathbf{S}^T(\tilde{\text{ö}}(0))\mathbf{E}\mathbf{S}(\tilde{\text{ö}}(0)).
\end{aligned}
$$

Ha találunk olyan $\eta, \nu \in R$ pozitív számokat, hogy $\mathbf{y}^T[-(\mathbf{D}_p^T + \mathbf{D}_p)]\mathbf{y} \geq \eta\,|\,\mathbf{y}\,|^2$, $\mathbf{y}^T(\mathbf{S}_p^T + {}$ $+ \mathbf{S}_p + \mathbf{E})\mathbf{y} \geq \vartheta\,|\,\mathbf{y}\,|^2$ és $\eta\vartheta > \|\,\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p\,\|^2$ teljesülnek, akkor $\dot{V}_{(3)}(\text{ö}) \leq -\eta\,|\,\mathbf{D}(\text{ö}(0))\,|^2 + 2$ $+2\,\|\,\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p\,\|\,|\,\mathbf{D}(\text{ö}(0))\,|\,|\,\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau))\,| - \vartheta\,|\,\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau))\,|^2 + \mathbf{S}^T(\text{ö}(0))\mathbf{E}\mathbf{S}(\text{ö}(0))$, azaz létezik $k \in$ $\in R$ pozitív szám, hogy

$$
\dot{V}_{(3)}(\text{ö}) \leq -k(\,|\,\mathbf{D}(\text{ö}(0))\,| - |\,\mathbf{S}(\text{ö}(-\tau))\,|\,)^2 + \mathbf{S}^T(\text{ö}(0))\mathbf{E}\mathbf{S}(\text{ö}(0)). \tag{42}
$$

Az alsó becsléshez felhasználva, hogy $\mathbf{D}_p$ és $\mathbf{S}_p$ elemei monoton függvények, $2\sum y_i y_j \leq \sum (y_i^2 + y_j^2)$, valamint $s_{ii} > 0$, $d_{ii} < 0, \forall i$-re és $s_{ij} < 0$, $d_{ij} > 0, \forall i \neq j$-re, kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}^T[-(\mathbf{D}_p^T + \mathbf{D}_p)]\mathbf{y} = -2\sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2 - \sum_{i\neq j} (d_{ij} + d_{ji}) y_i y_j \geq \\
\geq 2\left(\min_{i=1,\dots,n} |\,d_{ii}\,| - (n-1)\max_{i\neq j} |\,d_{ij}\,| \right) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \doteq \eta\,|\,\mathbf{y}\,|^2
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}^T[-(\mathbf{S}_p^T + \mathbf{S}_p + \mathbf{E})]\mathbf{y} \geq 2\sum_{i=1}^{n} s_{ii} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i^2 - \sum_{i\neq j} (s_{ij} + s_{ji}) y_i y_j \geq \\
\geq 2\left(\min_{i=1,\dots,n} |\,s_{ii}\,| - (n-1)\max_{i\neq j} |\,s_{ij}\,| - \max_{i=1,\dots,n} |\,\gamma_i\,| \right) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \doteq \vartheta\,|\,\mathbf{y}\,|^2 .
\end{aligned}
$$

Ezért ha

$$4\left(\min_{i=1,\dots,n} |d_{ii}| - (n-1)\max_{i\neq j} |d_{ij}|\right)\left(\min_{i=1,\dots,n} |s_{ii}| - (n-1)\max_{i\neq j} |s_{ij}| - \max_{i=1,\dots,n} |\gamma_i|\right) > \left\|\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p\right\|^2$$

teljesül, akkor a (41) kifejezés a (3) autonóm rendszerhez tartozó Ljapunov-funkcionál. Mivel euklideszi terekben $\left\|\mathbf{S}_p^T - \mathbf{D}_p\right\|^2$ megegyezik $\lambda_{\max}$ sajátértékkel, ezért ha a (40) feltétel teljesül, akkor a *7. tétel* és *2. megjegyzés* értelmében a (3) rendszer, így az általa jellemzett gazdaság is globálisan aszimptotikusan stabil.■

Látható, hogy az előző *12. tétel* feltételei rendkívül erősek. Míg a megelőző esetekben a legtöbb megkötés a kereslet és kínálat egyensúlyi pont körüli szerkezetére vonatkozott, most a tér teljes vizsgált tartományának struktúrájára adtunk megszorításokat. Ezenkívül a keresleti oldali sajátár-hatások dominanciája mellett, most a kínálati oldalon is megköveteltük a sajátár-hatások dominanciáját. A feltételben megjelenik még egy választott konstanssorozat, amely a késleltetett és nem késleltetett árhoz tartozó kínálat eltérésének nagyságával áll kapcsolatban, és a kínálati oldal árérzékenységekre vonatkozó megkötéseit szigorítja. A sajátérték megjelenése a feltételek között pedig értelmezési problémákat okozhat. Egy lehetséges interpretáció erre az absztrakt matematikai fogalomra, ha a kereslet és a kínálat árérzékenységének legnagyobb eltérésére jellemző számként értelmezzük. Ekkor a kérdéses (40) feltétel a keresleti és kínálati oldalon – külön-külön – az árérzékenységek eltéréseinek dominanciáját követeli meg a kereslet és kínálat árérzékenységeinek egymás közti eltéréseivel szemben. Így a feltétel utalhat a fogyasztói és termelői viselkedés különbözőségének, illetve sokszínűségének szükségességére a stabilitás érdekében.

Meg kell jegyeznünk még, hogy a tételben szereplő s_{ij} és d_{ij} parciális deriváltak egy-egy pontbeli függvényértékek, így implicite feltételeztük, hogy a megfelelő maximumok, illetve minimumok minden pontban léteznek. Ezzel leszűkítettük a lehetséges keresleti és kínálati függvények osztályát, hiszen biztosítanunk kellett, hogy legalábbis a lehetséges árvektorok halmazán a derivált függvények minden pontban értelmezve legyenek. Ekkor azonban kizártuk annak lehetőségét, hogy egyes termékek iránt egy kritikus saját ár felett egyáltalán ne legyen kereslet, illetve hogy bizonyos saját ár alatt ne legyen kínálatuk. Kizártuk ezzel a szabad jószág esetét is, vagyis hogy a kereslet egy elegendően kicsi (például zérus) saját árnál végtelen nagy legyen. Mindezekre megoldást jelenthet, ha a lehetséges árak tartományát a keresleti és kínálati függvények értelmezési tartományainak metszetére szűkítjük, azaz nem engedélyezünk olyan „kikiáltási” árat (kiinduló állapotot), amelyhez nem tartozik meghatározott kereslet, illetve kínálat egyidejűleg. Mindezek matematikai szempontból szigorú megszorításokat jelentenek, azonban közgazdasági tartalmuk relevánsnak tekinthető. Gondoljunk arra a gyakran tárgyalt esetre, amikor $\lim_{p_i \to 0} D_i(\mathbf{p}) = +\infty$, $\lim_{p_i \to \infty} D_i(\mathbf{p}) = 0$, $\lim_{p_i \to \infty} S_i(\mathbf{p}) = +\infty$ és ha $p_i = 0$, akkor $S_i(\mathbf{p}) = 0$, $i = 1,\dots,n$-re. Ekkor az elemzést a $p_i \in (0;+\infty)$, $i = 1,\dots,n$ nyílt intervallumra kell leszűkítenünk, amely mindössze annyit jelent, hogy a kiinduló árak közül kizárjuk a végtelen árakat (a zérus árakat már a kiinduló feltételeknél kizártuk).

Összegzés

Az általános egyensúlyelmélet négy alapkérdése (egzisztencia, unicitás, hatékonyság, stabilitás) közül a versenyzői gazdaság stabilitási tulajdonságait vizsgáltuk meg részletesebben. A gazdaság dinamikájának leírásához olyan áralkalmazkodási szabályt választottunk, amely szerint az árak változása arányos a túlkereslettel, azonban – a hagyományos neoklasszikus állásponttal szemben – a kínálat egy korábbi időpontbeli ártól függ, ezért csak némi késéssel tud alkalmazkodni a kereslethez. A *késleltetett áralkalmazkodási szabály* bevezetésével feloldhatóvá vált az időbeli tökéletes informáltság, illetve a szimultán reakciók feltétele.

A késleltetés nélküli gazdaságok stabilitásával kapcsolatos legfontosabb eredmények és a szükséges matematikai módszerek összefoglalását követően megmutattuk, hogy a késleltetés a versenyzői gazdaságra destabilizáló hatással van, mivel a szimultán modell stabilitási feltételei a késleltetett modellben nem garantálják a stabilitást. Ehhez elsőként egy absztrakt egytermékes gazdaságot vizsgáltunk, amelyben kétféle áralkalmazkodási modellt építettünk. Az első tisztán folytonos időt és konstans késleltetést feltételezett. A második viszont azt a speciális jelenséget hivatott modellezni, amikor a termelők csak bizonyos időpontokban szerzik be a döntéseik alapjául szolgáló információt, míg a fogyasztók igényei időben folytonosan változnak. Mindkét esetben azt láttuk, hogy amennyiben a keresleti oldal érzékenyebben (nagyobb mennyiségi változásokkal) reagál az ár változásaira, akkor az egytermékes gazdaság stabil, azonban ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a stabilitáshoz szükséges, hogy a termelői reakciókat befolyásoló időkésleltetés hossza egy bizonyos maximális értéknél kisebb legyen, azaz a termelők ne túl nagy késéssel alkalmazkodjanak a fogyasztói igényekhez. A maximális értéket meghatározó formula a kétféle modellben különböző, ami felhívja a figyelmet a folytonos és diszkrét időkezelés különbségeire.

Többtermékes gazdaságok vizsgálatakor egyfelől, mint rámutattunk, problémát jelent, hogy zárt alakban általában nem adható szükséges és elégséges stabilitási feltétel késleltetés esetén. Másfelől, mint láttuk, analitikus úton is adható elégséges feltétel a versenyzői gazdaság stabilitására, amely úgy tesz megkötéseket a gazdasági szerkezetre, hogy azok a gazdaság stabilitását minden időkésleltetési érték mellett biztosítsák. Megmutattuk, hogy az egyensúlyi árak lokális stabilitását biztosítja, ha a kiinduló feltételek mellett az egyensúlyi pontban *egyrészt* érvényesül egyfajta „erős" helyettesíthetőség, azaz minden egyes termék kereslete csak nőhet, kínálata pedig csak csökkenhet, ha egy másik termék ára nő, *másrészt* az árérzékenységek között szigorú kvantitatív összefüggés érvényesül, amely két dolgot takar: *1.* a kereslet árérzékenysége nagyobb, mint a kínálat árérzékenysége; *2.* a keresleti oldalon a sajátár-hatások dominánsak a keresztárhatásokkal szemben.

A többtermékes gazdaság globális stabilitási tulajdonságainak vizsgálatakor szintén az egyensúlyi pont körüli viselkedésből indultunk ki, majd megszorításokat adtunk a teljes tér struktúrájára. A lokális stabilitási feltételeken kívül ebben az esetben a kínálati oldalon is meg kellett követelnünk a sajátár-hatások dominanciáját, valamint a keresleti, illetve kínálati oldalon belül, külön-külön, az árérzékenységek eltérésének dominanciáját, a kereslet és kínálat árérzékenységeinek egymás közötti maximális eltérésével szemben. Az utóbbi feltétel a termelői és fogyasztói viselkedés sokszínűségének szükségességére utal.

A bemutatott matematikai módszerek, valamint a kapott eredmények kiindulási alapot jelenthetnek késleltetést is tartalmazó modellben végzett bifurkációszámításokhoz, azokon keresztül pedig a gazdaság kaotikus viselkedésének tanulmányozásához, illetve összetettebb áralkalmazkodási modellek konstrukciójához.

Hivatkozások

Andorka Rudolf–Dányi Dezső–Martos Béla [1967]: Dinamikus népgazdasági modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Arrow, J. K.–Block, H. D.–Hurwicz, L. [1959]: On the Stability of the Competitive Equilibrium II. Econometrica, Vol. 27. 82–169. o.

Arrow, J. K.–Debreu, G. [1979–1954]: Az egyensúly létezése versenygazdaságban. Megjelent: *Arrow, J. K.*: Egyensúly és döntés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Arrow, J. K.–Hahn, F. [1971]: General Competitive Analysis. Holden-Day, San Francisco.

Arrow, J. K.–Hurwicz, L. [1958]: On the Stability of the Competitive Equilibrium I. Econometrica, Vol. 26. 522–552. o.

Bródy András [1980]: Ciklus és szabályozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Chiarella, C. [1988]: The Cobweb Modell, Its Instability and the Onset of Chaos. Economic Modelling, Vol. 10.

Copson, E. T. [1935]: The Theory of Functions of a Complex Variable. Oxford at the Clarendon Press, London.

Ezekiel, M [1938]: The Cobweb Theorem. Quarterly Journal of Economics, Vol. 52. 255–280. o.

Gale, D. [1963]: A note on Global Instability of Competitive Equilibrium. Naval Reserch Logistic Quarterly, Vol. 10. 81–89. o.

Hale, J. [1971]: Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

Hicks, J. R. [1978]: Érték és tőke. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Hommes, C. [1999*a*]: Cobweb Dynamics under Bounded Rationality. CeNDEF, Amszterdam.

Hommes, C. [1999*b*]: Expectations Driven Price Volatility in an Experimental Cobweb Economy. CeNDEF, Amszterdam.

Marshall, A. [1890–2000]: A közgazdaságtan alapelvei (részletek). Megjelent: *Bekker Zsuzsa* (szerk.): Gazdaságelméleti olvasmányok – Alapművek alapirányzatok. Aula, Budapest, 2000.

Mas-Colell, A.–Whinston, M. D.–Green, J. R. [1995]: Microeconomic Theory. Oxford University Press, New York, Oxford.

Metzler, L. [1945]: The Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions. Econometrica, Vol. 13. 113–129. o.

Riesz Frigyes–Szőkefalvi Nagy Béla [1988]: Funkcionálanalízis. Tankönyvkiadó, Budapest.

Samuelson, P. A. [1941]: The Stability of Equilibrium. Econometrica, Vol. 9. 97–120. o.

Scarf, H. [1960]: Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium. International Economic Review, Vol. 1. 157–172. o.

Simonovits András [1998]: Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Simonovits András [1999]: A Comparison of the Local Stability of Rational and Naive Expectation. CASE-CEU WPS, Varsó.

Smith, A. [1992]: Nemzetek gazdagsága. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Stépán Gábor [1989]: Retarded Dynamical Systems. Longman Harlow, London.

Stépán Gábor [1998]: Delay-Differential Equation Models for Machine Tool Chatter. Megjelent: *Moon, F. C.* (szerk.): Dynamics and Chaos in Manufactoring Processes. John Wiley & Sons, Inc.

Wald, A. [1951]: On Some Systems of Equations of Mathematical Economics. Econometrica, Vol. 19.

Walras, L. [1874–2000]: A tiszta politikai gazdaságtan elemei, avagy a társadalmi gazdagság elmélete (részletek). Megjelent: *Bekker Zsuzsa* (szerk.): Gazdaságelméleti olvasmányok – Alapművek alapirányzatok. Aula, Budapest, 2000.

Zalai Ernő [1989]: Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.