Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. július–augusztus (597–620. o.)

MEDVEGYEV PÉTER

A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben

A szerző a pénzügyi matematika pénzügyi módszerekkel csökkenthető kockázatainak nagyságát próbálja matematikai megfontolásokkal meghatározni. A matematikai pénzügyek legegyszerűbb állításait ismerteti, diszkrét, véges időhorizont esetén belátja az eszközárazás első és második alaptételét.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G12, G13.

A tanulmányban a matematikai pénzügyek legegyszerűbb kérdéseit foglalom össze.[1] Némi absztrakcióval a matematikai pénzügyek legfontosabb kérdése a következő. Tegyük fel, hogy a jövő T időpontjában lehetőségünk[2] lesz egy H módon jelölt véletlen kifizetés megszerzésére. Mi jelenleg a H korrekt ára, mekkora kompenzáció jár jelenleg a H-ban foglalt jövőbeli kockázatért? Természetesen a kérdésre a válasz csak akkor adható meg, ha tisztázzuk a H véletlen kifizetés mögötti „fogadás” közgazdasági hátterét.

Ha a fogadás H eredménye csakis külső, ellenőrizhetetlen tényezőktől függ, akkor a H jelenlegi értékének meghatározása szigorú értelemben nem pénzügyi matematikai, sőt nem is közgazdasági feladat. A feladat akkor válik pénzügyi-matematikaivá, ha feltételezzük, hogy a H kifizetés mögötti kockázat pénzügyi eszközökkel, aktív pénzügy cselekvéssel módosítható.

A pénzügyi matematikában a pénzügyi módszerekkel csökkenthető kockázatok nagyságát próbáljuk matematikai megfontolásokkal meghatározni. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert a pénzügyi matematikát felületesen ismerők gyakran gondolják úgy, hogy a terület tárgya a *„hogyan legyünk okosak a tőzsdén”* kérdés megválaszolása. Annak ellenére, hogy ennek a kérdésnek a megválaszolását távolról sem tartom érdektelennek, nyomatékosan hangsúlyozni kell: nem erről van szó. Az elmélet kiinduló pontja éppen az, hogy semmilyen matematikai módszerrel sem lehetünk „okosabbak” a piacnál, és

* Köszönetet szeretnék mondani a Magyar Külkereskedelmi Banknak a vállalati professzori ösztöndíj keretében nyújtott támogatásért.

[1] A dolgozatban leírtak az irodalomban közismertek (*Elliott–Kopp* [2000]), mégis úgy gondolom, hogy érdemes a magyar közgazdászok figyelmét felhívni rájuk, ugyanis a bemutatott állítások talán nem elég széles körben ismertek. Különösen annak hangsúlyozását tartom fontosnak, hogy a pénzügyi derivatívák árazása matematikai szempontból nem tekinthető a matematikai közgazdaságtan önálló fejezetének. Ugyancsak fontosnak tartom a Dalang–Morton–Willinger-tétel itt tárgyalt bizonyításnak bemutatását, ugyanis a legutóbbi időszakig a tételt nehéz tételként tartották számon. Az itt közölt bizonyítás *Kabanov–Stricker* [2001], lényegében elemei, ugyanis az analízis néhány egyszerűbb tételétől eltekintve semmilyen komolyabb eredményre nem támaszkodik. A dolgozat a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetemen tartott előadásaimra támaszkodik, és megegyezik a diszkrét idejű modelleket tartalmazó tananyagrésszel.

[2] A H kifizetés nem feltétlenül előnyös. A H mögötti kifizetés lehet negatív is.

Medvegyev Péter, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Magyar Külkereskedelmi Bank vállalati katedra.

csak az átlagosnál nagyobb kockázatvállalással tudunk az átlagosnál nagyobb nyereséghez jutni.

A pénzügyi matematika megfontolásai az elméleti pénzügyek terén felismert kockázatminimalizálási elvre épülnek. Ez általános „filozófiai" elv, amely szerint egy véletlen kifizetésből származó kockázat csak annyiban ismerhető el, amennyiben az szükséges, indokolt volt. A túlzott kockázatviselés miatt elszenvedett veszteségekért nem jár kompenzáció. Természetesen kézenfekvő a kérdés: ki és mi határozza meg, hogy a kockázat túlzó, vagy sem? A válasz a közgazdaságtanban megszokott: a kockázat piaci ára. És mi határozza meg a kockázat piaci árát? Hát semmi más, mint a kockázat iránti kereslet és a kínálat, vagyis a kockázati preferenciák. Ennek megfelelően a matematikai pénzügyek a matematikai közgazdaságtan egyik speciális fejezete. Bár ez a besorolás „filozófiai" szempontból helyes, a terület mind matematikai hátterét, mind gyakorlati alkalmazhatóságát, verifikáltságát tekintve igencsak elkülönül az általános közgazdasági elmélettől. A döntő különbség nem elméleti, filozófiai karakterű. Sokkal inkább az alkalmazások nagy számában és jellegében nyilvánul meg.

Szokás a matematikai pénzügyek közgazdaságtanon belüli elkülönülését a preferenciákra való közvetlen hivatkozás hiányával indokolni, és azt mondani, hogy a pénzügyek a közgazdaságtan azon területe, ahol az árakat a preferenciákra való explicite hivatkozás nélkül is meg tudjuk határozni. Ez részben helyes, részben azonban félrevezető. Félrevezető annyiban, hogy miként később hangsúlyozni fogjuk, a preferenciákra csak akkor nem szükséges hivatkozni, ha a piac teljes, de nem teljes piacokon elvileg csak a preferenciák ismeretében határozható meg az ár. A konkrét alkalmazásokon alapuló pénzügyi modellekben azonban a piaci szereplők preferenciái a legritkább esetekben jelennek meg explicite. Ennek oka az alkalmazásokkal való élő, szoros kapcsolattartás, amelynek következtében a modellekben az olyan megfigyelhetetlen paraméterek, mint a preferenciák szerepeltetése, a nevetségesség elkerülése és a komolyság látszatának megőrzése végett, kerülendő.

A továbbiakban csak a diszkrét időhorizont esetére szorítkozom, vagyis felteszem, hogy a kereskedés csak véges számú, előre rögzített időpontokban lehetséges. Általában ugyancsak feltételezem, hogy a modellekben szereplő különböző valószínűségi változók, sztochasztikus folyamatok értékkészlete véges.[3] Ennek a leegyszerűsített megközelítésnek a túlbecsülhetetlen előnye, hogy matematikailag elemi. Miként látni fogjuk, a lineáris algebra, illetve a lineáris programozás legegyszerűbb, közismert tételein kívül semmilyen más komolyabb eredményre nem lesz szükségünk. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert a matematikai pénzügyekkel kapcsolatos általános elképzelés szerint a terület matematikailag rendkívül igényes. Ez igaz is, de csak akkor, ha folytonos időparamétert tételezünk fel. Ha az időhorizont diszkrét és véges, akkor semmilyen matematikai nehézség nem lép fel. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a folytonos időparaméter esetén elengedhetetlen martingálelmélet nyelvezetét a véges, diszkrét időhorizont tárgyalása során is érdemes használni, ugyanis egyrészt a martingálelmélet nyelvezete igen hatékonyan használható, másrészt a diszkrét idejű problémákon keresztül némi betekintést kaphatunk a jóval nehezebb, folytonos idejű tételek körébe. Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy csakis terminológiai szinten hivatkozunk a martingálelméletre, annak állításaira érdemben nincs szükségünk, a martingálokra kimondott állítások mindegyike véges összegek elemi átrendezésével igazolható.

A matematikai pénzügyek bevezető tárgyalását általában a binomiális modellre szokás építeni. Ennek két előnye van. Egyrészt a modell igen egyszerű, másrészt a modellből kiindulva folytonos határátmenetként éppen a matematikai pénzügyek kedvenc sztochasz-

[3] Kivétel a Dalang–Morton–Willinger-tétel bizonyítását tartalmazó alpont.

tikus folyamatát, a Wiener-folyamatot kapjuk. De ami a tárgyalás előnye, az egyben a hátránya is, ugyanis mind a binomiális modell, mind a Wiener-folyamat esetén a modell teljes, vagyis az árazás elméletének legfontosabb kérdése, a piac teljességének hiánya automatikusan rejtve marad. A dolgozat nem titkolt célja a binomiális modell „kiszorítása" a magyar oktatási gyakorlatból, és annak bemutatása, hogy nem túl sok többleterőfeszítéssel egy jóval általánosabb, áttekinthetőbb és lényegre törőbb tárgyalási módhoz juthatunk.

Az egyperiódusos modell

Első lépésként az egyperiódusos modellt tárgyaljuk. Ekkor összesen két időpontunk van: a jelen és a jövő. A jelen időszak árait ismerjük, és ismerjük a termékek jövőbeli viselkedését, vagyis tudjuk a lehetséges jövőbeli árakat, kifizetéseket. Az alapvető kérdés a következő: a jövőbeli lehetséges kifizetések ismeretében a jelenlegi árak konzisztensek, vagy sem?

Kockázatsemleges valószínűségek

Legyen adva M darab kockázatos pénzügyi instrumentum, w_m jelölje az m-edik instrumentum jelenlegi árát, és $s_m(\omega)$ az m-edik termék árát a jövőben, feltéve, ha az eszköz árát befolyásoló valamilyen külső véletlen paraméter éppen az ω értéket veszi fel. Ha $(\omega_n)_{n=1}^N$ a lehetséges kimenetelek[4] vektora, akkor definiálhatjuk az $(N\times M)$-es

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \doteq \begin{pmatrix} s_1(\omega_1) - w_1 & \dots & s_M(\omega_1) - w_M \\ s_1(\omega_2) - w_1 & \dots & s_M(\omega_2) - w_M \\ \vdots & \dots & \vdots \\ s_1(\omega_N) - w_1 & \dots & s_M(\omega_N) - w_M \end{pmatrix}$$

mátrixot. Vegyük észre, hogy a jelenlegi és a jövőbeli árakat kivontuk egymásból, vagyis a diszkontálást implicite elvégeztünk.

1. definició. *A $(w_m)_m$ árvektor mellett akkor van arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ portfólióvektor, amelyre*[5]

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0},$$

tehát amelyre egyetlen kimenetelre sem veszítünk, de legalább egy kimenetelre nyerünk.

Milyen feltételek mellett nincs lehetőség arbitrázsra, vagyis milyen feltételek mellett lehetetlen olyan portfóliót összeállítani, amely mellett pozitív valószínűséggel nyereséghez jutunk, de semmilyen körülmények között nem kell számolnunk veszteséggel? A lineáris programozás dualitási tételei segítségével megmutatjuk, hogy pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha megadható olyan $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ vektor, amelyre[6] $\mathbf{q}^*\mathbf{A} = \mathbf{0}^*$. Valóban, ponto-

[4] Kimenetelek helyett szokás világállapotokról beszélni. Ennek oka, hogy hangsúlyozni szokás: valójában a modellben nincsen definiálva semmilyen valószínűségi mező, ugyanis nincsen megadva az egyes ω_n kimenetelek valószínűsége.

[5] A matematikai közgazdaságtanban szokott módon $\geq$ a szeminagyobb reláció jele, és megkülönböztetendő a $\geqq$ jeltől.

[6] A továbbiakban megkülönböztetjük a sor- és az oszlopvektorokat. A * (csillag) a transzponálás jele.

san akkor nincsen arbitrázs, ha az $\mathbf{Ax} - \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségbe nem lehet szemipozitív $\mathbf{y}$ vektort írni, vagyis az

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \\ -\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = [-\mathbf{A}, \mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} &\leqq 0 \\ \mathbf{1}^*\mathbf{y} &\to \max \end{aligned}$$

feladatnak van optimális megoldása, és az optimális megoldás értéke nulla. A duális feladat

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &\geqq \mathbf{0} \\ -\mathbf{q}^*\mathbf{A} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^*\mathbf{E} &\geqq \mathbf{1}^* \\ \mathbf{q}^*\mathbf{0} &\to \min. \end{aligned}$$

A két feladatnak pontosan akkor van optimális megoldása, ha a duális feladatnak van lehetséges $\mathbf{q}$ megoldása.[7] Mivel a $\mathbf{q}$ pozitív, ezért alkalmas normalizálással feltehető, hogy valószínűségi mérték. A $\mathbf{q}$ pozitivitása fontos. A modellben ugyan explicite nem szerepel, de feltehetjük, hogy az $(\omega_n)_{n=1}^N$ kimenetelek halmazán adott egy $\mathbf{p}$ valószínűségi vektor, amely megadja az egyes ω_n kimenetelek objektív vagy statisztikai valószínűségét. A folytonos modellek megértésének nehézsége nagyrészt abból adódik, hogy magának a modellnek a felírásához szükséges explicite hivatkozni az objektív valószínűségre,[8] így a valószínűségi mérték[9] cseréjét explicite tárgyalni kell. Az itt tárgyalt diszkrét esetben explicite nincsen mértékcsere, ugyanis szükségtelen az objektív mérték fogalmát bevezetni. A $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ feltétel szerint nem változik a „releváns” kimenetelek halmaza. Ezt úgy szokás mondani, hogy a $\mathbf{q}$ valószínűség ekvivalens az eredeti $\mathbf{p}$ valószínűséggel, vagyis a nulla valószínűségű események a két valószínűségi mérték esetében megegyeznek.

2. definició. *A* $\mathbf{q}$ *szokásos elnevezései:*
1. *kockázatsemleges mérték,*
2. *kockázatsemleges valószínűség,*
3. *martingálmérték.*

Az $\mathbf{S} \doteq (s_j(\omega_i)), \mathbf{w} \doteq (w_j)$ jelölésekkel $\mathbf{q}^*\mathbf{S} = \mathbf{w}^*$, ami úgy is interpretálható, hogy a

[7] Talán nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a lineáris programozás dualitási tétele valójában a konvex halmazok szeparációs tételén alapszik. A szeparációs tételen kívül a bizonyítás során ki kell még használni a véges kúpok zártságát, amely ha nem is nehéz, de azért indoklásra szoruló állítás. A megjegyzés azért fontos, mert az általános eset bizonyítása szintén szeparációs megfontolásokra épül, és a bizonyítás nehéz lépése az elválasztandó halmazok zártságának indoklása. Az általános esetet tartalmazó Dalang–Morton–Willinger-tétel bizonyításának érdemi lépése éppen a véges kúpok zártságát biztosító tétel általánosításának igazolása.

[8] Valószínűségre való hivatkozás nélkül nem lehet például a Wiener-folyamat fogalmát értelmezni.

[9] Emlékeztetünk, hogy a mértéken egyszerűen a valószínűség nagyságát megadó függvényt értjük. A véges számú kimenetelt tartalmazó modellek esetében a mértékelmélet egyetlen állítására sincs érdemben szükségünk.

jelenlegi árak a jövőbeli árak várható értéke, ahol a várható értéket a **q** kockázatsemleges mérték szerint kell venni. A várható érték jelölését bevezetve,[10]

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{S}),$$

ahol a várható érték **M** operátorában a **q** felső index arra utal, hogy a várható értéket a **q** valószínűség szerint kell venni. Jelölje **p** az eredeti valószínűségeket! Vajon $\mathbf{p} = \mathbf{q}$? Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{S} \neq \mathbf{q}^*\mathbf{S} = \mathbf{w}$, akkor van olyan m indexű oszlop, vagyis termék, ahol mondjuk

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}_m) \doteq \mathbf{M}^{\mathbf{P}}(\mathbf{s}_m) = \mathbf{p}^*\mathbf{s}_m > w_m.$$

Ha lehetőségünk van korlátlan sokszor lejátszani a szituációt, akkor a nagy számok törvénye miatt, némi pontatlanságot megengedve, átlagban nyerünk, pontosabban, ha van olyan piaci szereplő, aki kockázatsemleges, vagyis aki nem tud különbséget tenni a jövőbeli átlag és a jelenlegi érték között, akkor nincs egyensúly. A kockázatsemleges valószínűség elnevezést éppen ez indokolja.

Diszkontálás

Az előző alpontban feltettük, hogy a jelenértékre hozást már megoldottuk. Most ezt vizsgáljuk meg. Az arbitrázs definícióját módosítjuk, ugyanis a különböző időpontokhoz tartozó értékeket diszkontálás nélkül nem vonhatjuk ki egymásból. Továbbra is jelölje **w** a jelenlegi árakat és **S** a jövőbeli véletlen kifizetések mátrixát. Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ portfólió definíció szerint arbitrázs, ha a következő két egyenlőtlenség közül az egyik teljesül

$$\mathbf{Sx} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{wx} \leqq 0,$$
$$\mathbf{Sx} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{wx} < 0.$$

Szavakban: a piacon akkor van arbitrázs, ha vagy kezdeti ráfordítás nélkül a jövőben legalább egy kimenetelre nyerhetünk, vagy negatív kezdeti ráfordítás mellett a jövőben semmilyen kimenetelre sem veszítünk. Ha $\mathbf{A} \doteq \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{w} \end{pmatrix}$, akkor a két feltétel összevonható, és definíció szerint a modellben akkor van arbitrázs, ha van olyan **x** portfólióvektor, amelyre $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$. A már bemutatott gondolatmenetet megismételve, pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha van olyan $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ vektor, hogy $\mathbf{y}^*\mathrm{A} = \mathbf{0}^*$. Az **A** szerkezete alapján, ha $\mathbf{y} \doteq (\mathbf{q}, \lambda)$, akkor $\mathbf{q}^*\mathbf{S} - \lambda\mathbf{w}^* = \mathbf{0}^*$. A $\lambda \doteq \exp(rt) > 0$ jelöléssel

$$\mathbf{w}^* = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{S} = \exp(-rt)\ \mathbf{q}^*\mathbf{S} = \exp(-rt)\ \mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{S}). \tag{1}$$

Ez éppen a kockázatsemleges árazás közismert formulája. Ha a piacon nincsen arbitrázs, akkor megadható olyan valószínűség, hogy a jelenlegi ár éppen a jövőbeli árak várható értékének jelenértéke. Ha az egyik termék, mondjuk a 0 indexű kötvény, vagyis[11] a kifizetése mindig 1, akkor[12]

[10] Érdemes hangsúlyozni, hogy látszólag valószínűségszámítási állítással van dolgunk, de ez tényleg csak a látszat. A **q** egy lineáris programozási feladat duálisának a megoldása, és mint ilyen, hagyományos értelemben vett árnyékár.

[11] A kötvény kifejezést most a matematikai pénzügyek terminológiája szerint használjuk, vagyis a biztos befektetést nevezzük kötvénynek. Természetesen biztos befektetés a valóságban nincsen, minden pénzügyi eszköz hordoz kockázatot, ha mást nem, akkor inflációs kockázatot. Ennek megfelelően a kötvény helyett szokás az ármérce elnevezést is használni, vagyis a kötvény tekinthető olyan terméknek, amelynek segítségével fejezzük ki a többi termék árát.

[12] A továbbiakban a 0 index mindig kötvényre utal.

$$w_0 = \lambda^{-1} \doteq \exp(-rt)\,.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy a nulladik oszlop mindig az azonosan 1 vektor. Erre tulajdonképpen nincsen szükség, de mivel a feltétel közgazdaságilag igen kézenfekvő, a tárgyalást pedig valamivel egyszerűbbé teszi, ezért a feltétellel élni fogunk. A feltétel egyik fontos következménye, hogy a λ nem függ a $\mathbf{q}$ kockázatsemleges valószínűségtől. Érdemes hangsúlyozni, hogy a „diszkontáló" terméknek, vagyis a nulladik terméknek nem kellene feltétlenül „kötvénynek" lenni, vagyis az értékének az egyes kimenetelekre nem kell konstansnak lennie. Amennyiben a nulladik termék értéke nem konstans, akkor a $\lambda w_0 = \mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{s}_0)$ formulából kiindulva határozhatjuk meg a diszkonttényezőt, amely persze ilyenkor függ a $\mathbf{q}$ kockázatsemleges valószínűségtől.

A piac teljessége

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{S}$-nek túl kevés a lineárisan független sora,[13] vagyis túl sok a véletlen kimenetel. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a piac, pontosabban a modell, nem teljes.

3. definíció. *Az* $\mathbf{S}$ *mátrix által reprezentált egyperiódusos modellt nem teljesnek mondjuk, ha* $\{\mathbf{Sx} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M\} \neq \mathbb{R}^N$.

Szavakban: a modell nem teljes, ha van olyan $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ véletlen kifizetés, amely nem „replikálható" az $\mathbf{S}$ mátrixban szereplő véletlen kifizetésekből összeállított portfólióval, vagyis van olyan $\mathbf{h}$ „véletlen követelés", amely az $\mathbf{S}$ segítségével nem replikálható.

A lineáris algebra terminológiájával a piac pontosan akkor nem teljes, ha az $\mathbf{S}$ oszlopvektorai által kifeszített tér nem egyezik meg az $\mathbb{R}^N$ térrel, vagyis az $\mathbf{S}$ oszlopvektor terének dimenziója kisebb, mint N. Ha a piac teljes, akkor az oszlopvektor tér dimenziója N, vagyis az $\mathbf{S}$ sorai lineárisan függetlenek, következésképpen a $\mathbf{q}^*\mathbf{S} - \lambda\mathbf{w}^* = \mathbf{0}$ egyenletnek adott $\mathbf{w}$ esetén egyetlen olyan $(\mathbf{q}, \lambda)$ megoldása van, amelyre nézve a $\mathbf{q}$ koordinátáinak összege 1, így teljes piac esetén a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű. Megfordítva, ha a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű, akkor a piac teljes, ugyanis ha az $\mathbf{S}$ sorai nem feszítenék ki a teljes $\mathbb{R}^N$ teret, akkor alkalmas $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorral $\mathbf{u}^*\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Alkalmas θ esetén $\mathbf{q} + \theta\mathbf{u} > \mathbf{0}$. A $\mathbf{q} + \theta\mathbf{u}$ elemeit normalizálva, a $\mathbf{q}$ mellett készíthetünk egy olyan másik $\mathbf{r}$ valószínűségi vektort, amelyre $\mathbf{r}^*\mathbf{S} - \mu\mathbf{w}^* = \mathbf{0}$, így a kockázatsemleges valószínűség nem lesz egyértelmű. Összefoglalva: az egyperiódusos modellben a piac pontosan akkor teljes, ha a kockázatsemleges valószínűség egyértelmű.

Származtatott termékek árazása

Most vegyük azt az esetet, amikor az $\mathbf{S}$-nek túl sok oszlopa van, vagyis amikor az $\mathbf{S}$ oszlopai összefüggnek. Legyen az első K vektor az oszlopvektorok egy bázisa.[14] Mivel egy bázisba mindig bevihetünk egy nem nulla vektort, feltételezzük, hogy a kötvény mindig eleme a bázisnak, vagyis a kötvény mindig alaptermék, így a diszkonttényező független a bázistól. Az első K terméket alapterméknek vagy bázisterméknek mondjuk, a többi terméket származtatott vagy derivatív terméknek. Evidens módon a származtatott–alaptermék megkülönböztetés relatív és bázisfüggő. Ha az $\mathbf{s}_k$ származtatott, akkor alkalmas

[13] Vagyis az $\mathbf{S}$ rangja kisebb, mint a sorvektorok – vagyis a véletlen kimenetelek – száma, N.

[14] A teljes piac, illetve a bázistermékek legegyszerűbb esete, ha az $\mathbf{S}$ tartalmazza az $\mathbf{E}$ egységmátrixot. Az ide tartozó termékeket Arrow–Debreu-termékeknek szokás nevezni. Világos, hogy minden termék az Arrow–Debreu-termékek származtatott terméke.

$(\delta_j)_{j=1}^K$ konstansokkal $\mathbf{s}_k = \sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j$, amiből, ha nincsen arbitrázs, $w_k = \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$, ugyanis az (1) árazó képlet alapján

$$w_k = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{s}_k = \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j = \sum_{j=1}^K \delta_j \lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{s}_j = \sum_{j=1}^K \delta_j w_j.$$

Ha ismerjük az alaptermékek árát, és ismerjük a δ_j együtthatókat, akkor kiszámolhatjuk a származtatott termékek árát. Vegyük észre, hogy mivel az alaptermékek definíció szerint bázist alkotnak, a $(\delta_j)_{j=1}^K$ koordináták egyértelműek, tehát az alaptermékek ára egyértelműen meghatározza a származtatott termékek árát. Természetesen ez a szabály az arbitrázs kizárásának feltételén múlik. Ha w_k egy származtatott termék ára és mondjuk $w_k > \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$, akkor a k-adik terméket a $(\delta_j)_{j=1}^K$ súlyokkal szintetikusan előállítva biztos $w_k - \sum_{j=1}^K \delta_j w_j$ nyereséghez juthatunk. Vegyük az alaptermékek által meghatározott első K terméket, és a $\mathbf{w}_K^* = \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\mathbf{S}_K$ bázis alrendszerben határozzuk meg a kockázatsemleges valószínűségeket. Ha k származtatott termék, akkor

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{j=1}^K \delta_j w_j = \lambda^{-1}\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{q}_K^*\mathbf{s}_j = \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j = \\ &= \lambda^{-1}\mathbf{q}_K^*\mathbf{s}_k \doteq \lambda^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{q}_K}(\mathbf{s}_k)\,, \end{aligned}$$

tehát az árazási formulában szereplő kockázatsemleges valószínűségeket elegendő a bázistermékekkel kiszámolni.

Származtatott termékek árazása nem teljes piacokon

A származtatott termékek árazási problémája a következő. Tegyük fel, hogy az **S** piacon nincsen arbitrázs, és adott egy **h** véletlen kifizetésvektor, vagyis adott az $\mathbb{R}^N$ egy eleme. Milyen árat kell adni a **h** terméknek ahhoz, hogy a **h** termékkel kiegészített (**S, h**) piac arbitrázsmentes maradjon? Ha a **h** előállítható a bázistermékek lineáris kombinációjaként, akkor a válasz evidens. Ha $\mathbf{h} = \sum_{j=1}^K \delta_j \mathbf{s}_j$, akkor a **h** egyedül lehetséges ára $\sum_{j=1}^K \delta_j w_j$. Mi történik azonban akkor, ha a **h** nem állítható elő a már beárazott termékek lineáris kombinációjaként? Ha a piac nem teljes, akkor ilyen **h** vektor megadható. Ha **q** egy kockázatsemleges valószínűségi mérték, és a **h** árát a

$$\lambda^{-1}\mathbf{q}^*\mathbf{h} \doteq \lambda^{-1}\sum_{j=1}^N q_j h_j = \lambda^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{q}}(\mathbf{h})$$

értékkel definiáljuk, akkor továbbra is érvényben marad az (1), vagyis a piacon az új termékkel nem vezetünk be arbitrázst. Ugyanakkor mivel a **q** nem egyértelmű, a **h** ára sem számolható ki egyértelműen, vagyis pusztán az arbitrázsmentesség feltételére építve a derivatív árazás problémája nem oldható meg. A matematikai pénzügyek valódi problémája nem általában a származtatott termékek árazása, hanem a nem teljes piacon való árazás. A bevezető pénzügyi kurzusokon tárgyalt modell – nevezetesen a binomiális, illetve a binomiális modell folytonos általánosításának tekinthető Wiener-folyamatra épülő úgynevezett Black–Scholes-modell – teljes, így az árazás kérdése triviálisan megoldható. Az általános esetben azonban a tárgyalt módszer nem használható. Ezt azért kell hangsúlyozni, mert miként a bevezetőben említettük, a pénzügyi matematikával való első ismerkedéskor hajlamosak vagyunk azt gondolni, hogy a pénzügyek, szemben a közgazdaságtan más területeivel, nem épít a hasznossági függvény, illetve az általános egyensúlyelmélet hagyományos fogalmaira, és az árazás problémáját a preferenciákra való hivatkozás nélkül oldja meg. Sajnos ez nem így van. A hasznossági függvényektől független megközelítés csak teljes piac esetén működik, és az általános esetben pusztán az arbitrázs lehetetlenségére alapozva nem adható meg árazó képlet.

Többperiódusos modellek

Térjünk rá a többperiódusos modellek ismertetésére. Első lépésként röviden emlékeztetünk a feltételes várható érték, illetve a martingál fogalmára. Hangsúlyozzuk, hogy a martingálelméletet, illetve a feltételes várható érték fogalmát csak terminológiaként használjuk, a valószínűségszámítás ezen nevezetes fogalmainak egyetlen mélyebbnek mondható tulajdonságát sem fogjuk használni.

Feltételes várható érték, martingálok

Először néhány valószínűségszámítási fogalmat vezetünk be. Legyen $\Omega \doteq \{\omega_k\}_{k=1}^N$ a kimenetelek, világállapotok véges halmaza, $\mathbb{T} \doteq \{0,1\ldots \hat{O}\}$ a lehetséges időszakok úgyszintén véges halmaza. A martingálok definiálásához a végesség feltételére általában nincs szükség, de a gondolatmenet egyszerűsítése céljából csak erre az elemi esetre szorítkozunk. Jelölje $\mathcal{A}$ a lehetséges eseményeket, vagyis az Ω megengedett részhalmazait. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ hasznos szemléltetése a döntési fa. Egy ω_k a $t = 0$ időponttól a $t = T$ végpontig lefutó teljes út.[15] Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény például adott csomóponton átmenő utak halmaza, vagy megadott csomópontokon átmenő utak halmaza. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármasról feltesszük, hogy kielégíti az elemi valószínűségszámítás szokásos megkötéseit.

Ha ξ az Ω halmazon értelmezett függvény, akkor várható értéken az[16]

$$\mathbf{M}(\xi) \doteq \sum_{i=1}^{N} \xi(\omega_i)\mathbf{P}(\{\omega_i\}) \doteq \int_\Omega \xi d\mathbf{P}$$

összeget értjük. Mi van akkor, ha a $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$ értelmetlen, vagy ami sokkal fontosabb: értékét a rendelkezésünkre álló információk alapján nem ismerjük. Legyen $(A_n)_{n=1}^K$ az Ω partíciója, vagyis $A_n \cap A_m = \emptyset$, ha $n \neq m$, és $\Omega = \cup_n A_n$. Tegyük fel, hogy az (A_n) elemein a ξ ismert. Várható értéken ekkor az

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \xi(\omega_n)\mathbf{P}(A_n), \qquad \omega_n \in A_n$$

súlyozott átlagot értjük, feltéve, hogy az összeg nem függ az $\omega_n \in A_n$ választásától, vagyis a ξ az $(A_n)_n$ partíció elemein konstans. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a ξ mérhető az $(A_n)_n$ partícióra, illetve az $(A_n)_n$ események által generált eseménytérre, σ-algebrára nézve. Az $(A_n)_n$ partícióhoz tartozó σ-algebra az $(A_n)_n$ halmazok összes lehetséges véges

[15] Vagyis az összeölelkező fa nem megengedett vagy legalábbis nem szerencsés fogalom.

[16] A következőkben az integráljelet gyakran fogjuk véges összegek jelölésére használni. Természetesen csakis jelölésről van szó, és az integráljeleket az olvasó, ha úgy tetszik, átugorhatja.

egyesítéseinek halmaza. Legegyszerűbben $(A_n)_n$ mérhető függvényt úgy kaphatunk, ha átlagoljuk ξ-t a A_n eseményeken:[17]

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{n=1}^{K} \mathbf{M}(\xi\chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^{K} \frac{\mathbf{M}(\xi\chi_{A_n})}{\mathbf{P}(A_n)} \mathbf{P}(A_n) \doteq$$

$$= \sum_{n=1}^{K} \eta(\omega_n)\mathbf{P}(A_n).$$

A részátlagokat megadó η függvényt a ξ feltételes várható értékének mondjuk. Az elnevezést az indokolja, hogy parciálisan, valamifajta feltétel szerint, már elvégeztük az átlagolást. Ha $\mathcal{F}$ jelöli az $(A_n)_n$ partíció által definiált eseményteret, akkor az

$$\eta \doteq \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$$

jelöléssel fogunk élni. Az η az egyetlen olyan $\mathcal{F}$-mérhető változó, vagyis az egyetlen olyan változó, amely konstans az $\mathcal{F}$-et generáló partíció elemein, és amelyre[18]

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})\chi_F) \doteq \mathbf{M}(\eta\chi_F) = \mathbf{M}(\xi\chi_F), \qquad \forall F \in \mathcal{F}.$$

1. állítás. *Könnyen belátható,*[19] *hogy a feltételes várható érték a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. Rendezéstartó, vagyis ha $\xi \geqq 0$, *akkor* $\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \geqq 0$.

2. Lineáris, vagyis $\mathbf{M}(\alpha\xi + \beta\eta \mid \mathcal{F}) = \alpha\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) + \beta\mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F})$.

3. Ha ξ $\mathcal{F}$*-mérhető, vagyis ha az* $\mathcal{F}$*-et generáló* $(A_n)_n$ *halmazokon konstans, akkor* $\xi = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F})$.

4. Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*, vagyis az* $\mathcal{F}$ *a* $\mathcal{G}$ *elemeinek további partíciója, akkor*

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{F}) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}) = \mathbf{M}(\xi \mid \mathcal{G}),$$

tehát a „durvább partíció mindig győz". Erre az igen fontos tulajdonságra toronyszabályként szokás hivatkozni.

5. Ha a ξ $\mathcal{F}$*-mérhető,* η *tetszőleges, akkor* $\mathbf{M}(\xi\eta \mid \mathcal{F}) = \xi\mathbf{M}(\eta \mid \mathcal{F})$.

A feltételes várható érték utolsó tulajdonságára mint kiemelési szabály szokás hivatkozni. Vegyük észre, hogy a toronyszabály tekinthető a teljes valószínűség tétele általánosításának, ezért szokás teljes várható érték tételnek is mondani.

Legyen $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{T}}$ eseményterek sorozata, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, vagyis tegyük fel, hogy a lehetséges események halmaza monoton nő. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_n)_n$ sorozat filtráció. Filtrációra legegyszerűbb példa, amikor a filtrációhoz tartozó partíciók egymás finomításai, vagyis a rákövetkező partíciót az előző további osztásával, finomításával kapjuk. Ez éppen a döntési fával ábrázolható a legjobban. A binomiális modellben minden időpontban minden csúcspontból két ág indul, vagyis a filtrációt megadó partíció minden halmazát minden időpontban két nem üres részre bontjuk. Nincsen azonban semmi akadálya annak, hogy az egyes időpontokban bizonyos csúcspontokból csak egy, más csúcspontokból pedig több ág is kiinduljon. Ennek az általános helyzetnek

[17] Értelemszerűen χ_A az A halmaz indikátorváltozója, vagyis $\chi_A(\omega) = 1$, ha $\omega \in A$, és $\chi_A(\omega) = 0$, ha $\omega \notin A$.

[18] Az összefüggést az általános esetben szokás a feltételes várható érték definíciójának tekinteni.

[19] Ha az olvasó a megadott szabályokat nem ismeri, célszerű, ha azok tartalmát alaposan meggondolja. Hangsúlyozzuk, hogy mivel az Ω alaptér véges számú kimenetelből áll, ezért az állítások mindegyike egyszerű összegek átrendezését tartalmazza.

a leírását, kódolását tartalmazza a filtráció. A filtráció szokásos interpretációja szerint: ahogyan időben haladunk előre, egyre több eseményt tudunk megkülönböztetni, így az információ felhalmozódásával a lehetséges események halmaza bővül. Ha $(\xi_n)_{n\in\mathbb{T}}$ olyan sorozat, amelyre a ξ_n változó $\mathcal{F}_n$-mérhető, vagyis a ξ_n konstans az $\mathcal{F}_n$ eseményeket definiáló partíción, akkor azt mondjuk, hogy a $(\xi_n)_n$ sorozat adaptált az $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrációra. A döntési fa terminológiájával ez azt jelenti, hogy a folyamat értékei a csúcspontokba vannak írva.

4. definició. *A $(\xi_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptált sorozat martingál, ha $\xi_t = \mathbf{M}(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$.*

Szemléletesen: egy döntési fa martingál, ha a csúcspontokba írt érték mindig a csúcspontban szereplő szétágazás által meghatározott következő csúcspontok átlaga, ahol az átlagot az átmenetvalószínűségek szerint kell venni.[20] Diszkrét modellekben, vagyis ahol az időhorizont véges, minden martingál felírható $\xi_t = \mathbf{M}(\xi_T \mid \mathcal{F}_t)$ módon, vagyis a végpontokban definiált valószínűségi változó rekurzív visszaátlagolásaként.

5. definició. *A $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték a $(\xi_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptált sorozatra nézve martingálmérték, ha a $\mathbf{Q}$ alatt a sorozat martingál.*

Nincs diszkontálás

A többperiódusú modellek annyiban mások, mint az egyperiódusú modellek, hogy az arbitrázs definíciója némiképpen bonyolultabb. Az egyszerűség kedvéért a mátrixokra utaló félkövér jelölést elhagyjuk, ugyanis majd a mátrixokból álló mátrixokat fogjuk félkövér módon jelölni. Mindig feltesszük, hogy adott egy $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ filtráció, és egy adaptált $(S(t))_{t=0}^{T}$ alapfolyamat. Minden $S(t)$ N sorból és M oszlopból álló mátrix. Szerencsésebb azonban, ha az $S(t)$-t M darab Ω-án értelmezett függvénynek képzeljük el. Mivel elhagytuk a mátrixokra utaló félkövér jelölést, illetve nem írjuk ki az $S(t)$ függvények argumentumait, ezért a jelölésből közvetlenül nem teljesen világos, hogy az $S(t)$ olyan mátrix, amelynek annyi sora, illetve annyi oszlopa van, amennyi a lehetséges világállapotok, illetve a modellben levő termékek száma. Egyelőre ne foglalkozzunk a diszkontálással, és az $S(t)$ jelöljön értékpapírárakat. Jelölje $\theta(t)$ a $[t-1,t)$ szakaszon tartott portfóliót. Miként az $S(t)$, a $\theta(t)$ is mátrix, illetve a kimenetelektől függő függvény. A θ értelmezési tartománya $\mathbb{T}\backslash\{0\}$ Legyen $c_\theta(t)$ a t időpontban a θ stratégia által generált nyeremény összege. Mivel a diszkontálástól eltekintettünk, ezért az egyes időszakokban generált nyereményeket össze lehet adni. A c_θ értelmezési tartománya $\mathbb{T}$. Evidens megfontolások alapján[21]

$$\begin{aligned} c_\theta(0) &\doteq -S(0)\,\theta(1) \\ c_\theta(t) &\doteq S(t)\,[\theta(t) - \theta(t+1)], \qquad t = 1,2,\ldots,T-1 \\ c_\theta(T) &\doteq S(T)\,\theta(T). \end{aligned}$$

Ha definíció szerint

$$\theta(0) \doteq \theta(\mathrm{T}+1) \doteq 0,$$

akkor a nyeremény alakulását leíró egyenletrendszer

[20] Vegyük észre, hogy egy valószínűségi mező akkor adott, ha az összes út valószínűsége adott, amikor is az összes csúcspont valószínűsége adott, vagyis adottak az átmenetvalószínűségek.

[21] Ügyeljünk a szorzások pontos tartalmára. A $c_\theta(t)$ valószínűségi változó, vagyis vektor.

$$c_\theta(t) \doteq S(t)\,[\theta(t) - \theta(t+1)], \qquad t \in T.$$

A jelölés anomáliáit talán az magyarázza, hogy el akarjuk kerülni a $\theta(-1)$ változót, és explicite hangsúlyozni akarjuk a θ és az S folyamatok mérhetőségi, információs struktúrájának eltérő voltát. A bevételi oldal $S(t)\,\theta(t)$, a kiadási oldal $S(t)\,\theta(t+1)$. A $t = 0$ pontban még nincs bevétel, a $t = T$ pontban már nincs kiadás. A $\theta(t)$ érték a $[t-1, t)$ szakaszon tartott portfólió, amelyről a $t - 1$ pontban kell dönteni, vagyis a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$ mérhető. Erre a tulajdonságra a sztochasztikus folyamatok irodalmában mint előrejelezhetőség szokás hivatkozni. Vezessük be a V_θ értékfolyamatot, amely azt mutatja, hogy mennyi volt a pozíció kumulált eredménye az időszak elején, az újrabefektetés előtt.

$$\begin{aligned} V_\theta(T) &\doteq \sum_{t=0}^{T} c_\theta(t) = \\ &= -S(0)\,\theta(1) + S(1)\,[\theta(1) - \theta(2)] + \ldots + S(T)\,\theta(T) = \\ &= \sum_{t=0}^{T} [S(t) - S(t-1)]\theta(t). \end{aligned}$$

Ha $t = 0$, akkor $V_\theta(0) \doteq 0$.

6. definició. *A többperiódusos modellben akkor van arbitrázs, ha van olyan θ előrejelezhető stratégia, amelyre $V_\theta(T) \geq 0$.*

1. tétel. (Az eszközárazás első alaptétele.) *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *nincs arbitrázs,*
2. *megadható olyan $\mathbf{Q} > 0$ valószínűség a kimenetelek Ω terén, hogy az S folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.*

Bizonyítás. Ha létezik $\mathbf{Q}$ martingálmérték, és van arbitrázs, akkor felhasználva, hogy a $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$, és hogy $V_\theta(T) \geq 0$, illetve hogy a θ előrejelezhető és ezért használható, a kiemelési szabály

$$\begin{aligned} 0 < \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(V_\theta(T)) &\doteq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{k=1}^{T}[S(k) - S(k-1)]\cdot\theta(k)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(k) - S(k-1)]\cdot\theta(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(S(k) - S(k-1) \mid \mathcal{F}_{k-1})\cdot\theta(k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{T}\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(0\cdot\theta(k)) = 0\,, \end{aligned}$$

ami lehetetlen. Megfordítva, tegyük fel, hogy nincs arbitrázs. Vezessük be az

$$\mathbf{A} \doteq ([S(T) - S(T-1)],\ [S(T-1) - S(T-2)], \ldots)$$

mátrixot, és jelölje E az olyan portfólióstratégiákat, amelyek elemei előrejelezhetők.

Mivel az előrejelezhető stratégiák triviálisan lineáris alteret alkotnak, ezért az E véges dimenziós altér. Ha nincsen arbitrázs, akkor az

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \in E$$

egyenlet nem oldható meg. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a

$$K \doteq \mathbf{A}E \doteq \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in E\},$$

metszete a $\mathbb{R}_+^N$ kúppal csak a nulla vektorból áll, vagyis $K \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$. A K az E véges dimenziós altér lineáris leképezéssel vett képe, vagyis maga is véges dimenziós altér, tehát zárt, konvex halmaz, amely a feltétel szerint diszjunkt a

$$P_{N-1} \doteq \left\{\mathbf{x} \geq 0 : \sum_{n-1}^{N} x_n = 1\right\}$$

halmaztól. A konvex halmazok szeparációs tétele alapján[22] van olyan $\mathbf{q}$ vektor, amelyre

$$\mathbf{q}^*\mathbf{k} < \mathbf{q}^*\mathbf{s}, \qquad \mathbf{k} \in K,\ \mathbf{s} \in P_{N-1}. \tag{2}$$

Mivel a $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ megengedett, ezért a $\mathbf{q}^*\mathbf{s}$ mindig pozitív, vagyis mivel a P_{N-1} tartalmazza az egységvektorokat, ezért $\mathbf{q} > \mathbf{0}$. Ugyanakkor mivel a K altér, ezért triviálisan $\mathbf{q}^*\mathbf{k} = 0$, ugyanis ha valamilyen $\mathbf{k} \in K$ vektorra $\mathbf{q}^*\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, akkor mivel minden λ skalárra $\lambda\mathbf{k} \in K$, a (2) nem teljesülhet. Az elmondottak szerint tehát van olyan $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, amelyre

$$\mathbf{q}^*\mathbf{Ax} = 0, \qquad \mathbf{x} \in E.$$

A $\mathbf{q}$ tekinthető $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ valószínűségnek, és $0 = \mathbf{q}^*\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathbf{Ax})$ minden $\mathbf{x} \in E$ előrejelezhető stratégiára. Speciálisan, ha $F \in \mathcal{F}_{t-1}$ tetszőleges, akkor az

$$\mathbf{x} = (\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\chi_F,\mathbf{0},\ldots\mathbf{0})$$

stratégiasorozat előrejelezhető, tehát

$$0 = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}([S(t) - S(t-1)]\chi_F) = 0,$$

következésképpen

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(S(t)\chi_F) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(S(t-1)\chi_F), \qquad F \in \mathcal{F}_{t-1},$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$S(t-1) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(S(t) \mid F_{t-1}),$$

tehát az S a $\mathbf{Q}$ mérték mellett martingál.

Diszkontálás és önfinanszírozó portfóliók

Most térjünk rá a diszkontálás kérdésére, vagyis tegyük fel, hogy az egyes időszakok jövedelmét nem lehet összeadni! Legyen ismét a 0 indexhez tartozó termék kötvény, $S_0(t)$ legyen a kötvény ára a t időpontban. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $S_0(0) = 1$. Miként az egyperiódusos modellben, most is feltesszük, hogy minden t időpontban $S_0(t) > 0$. Evidens módon a diszkontált ár

[22] A P_{N-1} kompakt, tehát a szeparáció szigorúan teljesül.

$$\overline{S}(t) \doteq \frac{1}{S_0(t)} S(t).$$

A továbbiakban a felülvonás mindig a diszkontálásra utal. Az árváltozásokból származó nyeremények diszkontált összege

$$\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\theta(t). \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a diszkontálás miatt az egyes összeadandó tényezők azonos időpontra vonatkoznak, így az összeg közgazdaságilag értelmes. Gondot jelent azonban, hogy a (3) nagysága szempontjából a kötvénypozíció értéke teljesen érdektelen, ugyanis

$$\overline{S}_0(t) - \overline{S}_0(t-1) = 1 - 1 = 0,$$

így a $\theta_0(t)$ nagysága irreleváns. A nem diszkontált esetben az előrejelezhetőségtől eltekintve tetszőleges pozíció felvételét megengedtük, tehát semmilyen további megkötést nem alkalmaztunk az egyes időszakokra. Most azonban más utat követünk, explicit megszorítást vezetünk be a lehetséges portfóliókra. Erre azért van szükség, mivel a kötvénypozíciót nem tudjuk rögzíteni, másképpen fogalmazva: mivel ragaszkodunk a (3) „integrál” formulához, de ez a formula a θ_0 értékére semmilyen előírást nem tartalmaz, ezért a θ_0 mindenkori értékét kívülről a modellbe bevitt feltétellel rögzítjük. A továbbiakban a $\overline{\theta}$ jelölésen azt értjük, hogy a $\overline{\theta}$ által reprezentált stratégiában a 0 indexű termék értéke 0, a többi koordináta pedig előrejelezhető folyamatot alkot.

7. definició. *A* $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ *sorozatot önfinanszírozónak mondjuk, ha*

$$S\,(t)\ \theta\,(t+1) = S\,(t)\ \theta\,(t), \tag{4}$$

vagyis a portfólió átrendezése a t időszakban nem eredményez nettó pénzáramlást. Tetszőleges $\overline{\theta}$*-ra a* θ_0 *kötvénypozíció értéke úgy módosul, hogy „egyenlegezze” a többi pozícióban keletkező értékváltozást.*

Mivel a (4) definícióban mindkét oldal leosztható $S_0(t)$-vel, ezért az

$$\overline{S}(t)\theta(t+1) = \overline{S}(t)\theta(t)$$

is teljesül, vagyis ha a $\theta\, S$ önfinanszírozó, akkor a $\theta\, \overline{S}$ önfinanszírozó, és nyilván megfordítva. Nekünk azonban több kell. Legyen $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető portfólió a „hagyományos” eszközökre! Ha a kötvénypozíciót minden t időpontban a

$$\sum_{k=1}^{M} S_k(t)\theta_k(t) - \sum_{k=1}^{M} S_k(t)\theta_k(t+1) = S_0(t)\theta_0(t+1)$$

szabállyal választjuk, egyenlegezzük, akkor önfinanszírozó portfóliót kapunk. Világos, hogy ha $(\theta_k(t+1))_{k=1}^{M}$ $\mathcal{F}_t$-mérhető, akkor a $\theta_0(t+1)$ is $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis a θ_0 egyértelműen és önfinanszírozó és előrejelezhető módon került rögzítésre. A portfólió diszkontált értéke a t időpontban

$$\overline{V}(t) \doteq \frac{1}{S_0(t)} S(t)\theta(t) = \overline{S}(t)\theta(t).$$

A portfólió értéke a T időpontban az önfinaszírozás feltétele miatt

$$\begin{aligned} V(T) &\doteq S(T)\theta(T) = S(T)\theta(T) \pm S(T-1)\theta(T-1) \pm \ldots = \\ &= S(T)\theta(T) - S(T-1)\theta(T) + \ldots = \\ &= [S(T) - S(T-1)]\theta(T) + \ldots = \\ &= \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\theta(t) + S(0)\theta(1) = \\ &= \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\theta(t) + S(0)\theta(0) \doteq \\ &\doteq G(T) + V(0), \end{aligned}$$

ahol G az úgynevezett nyereményfolyamat. Mivel a levezetés csak az önfinanszírozáson múlt, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \overline{V}(T) &= \sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\theta(t) + \overline{V}(1) \doteq \\ &\doteq \sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t) + \overline{V}(0) = \\ &= \overline{G}(T) + \overline{V}(0). \end{aligned} \tag{5}$$

8. definició. *A modellben nincsen arbitrázs, ha nincs olyan θ előrejelezhető, önfinanszírozó portfóliófolyamat, amelyre* $V(0) = 0$, de $V(T) \geq 0$.

Világos, hogy ez ekvivalens azzal, hogy nincs olyan θ, amelyre $V(0) = 0$ és

$$\overline{V}(T,\theta) \doteq \frac{1}{S_0(T)} V(T,\theta) \geq 0,$$

vagy ami ugyanaz, nincs olyan előrejelezhető folyamat, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t) \geq 0.$$

A θ és a $\overline{\theta}$ között lényeges eltérés van. A θ előrejelezhető, önfinanszírozó, és $M + 1$ dimenziós, a $\overline{\theta}$ csak előrejelezhető és lényegében csak M dimenziós, ugyanis a 0 indexe azonosan nulla. Az elmondottak alapján az eszközárazás első alaptételét könnyen kiterjeszthetjük a diszkontálás esetére:[23]

2. tétel. (Az eszközárazás első alaptétele.) *Pontosan akkor nincs arbitrázs, ha van olyan* **Q** *mérték, amelyre nézve az* $\overline{S}$ *diszkontált árfolyam folyamat* **Q***-martingál!*

A Dalang–Morton–Wilinger-tétel

Ez idáig feltételeztük, hogy a lehetséges kimenetelek, világállapotok halmaza véges. Ez nagyban segítette a tárgyalást, ugyanis matematikailag csakis mátrixokkal kellett foglalkozni, és az egész gondolatmenet a lineáris algebra elemi keretében volt tárgyalható. A matematikai pénzügyek egyik méltán ünnepelt tétele, az úgynevezett Dalang–Morton–

[23] Minden modellben az eszközárazásnak két alaptétele van. Az első az arbitrázs és a martingálmérték kapcsolatát adja meg, a második alaptétel pedig a teljesség és a martingálmérték egyértelműségét kapcsolja össze.

Willinger-tétel[24] szerint, az eszközárazás első alaptételében a diszkrét és véges időhorizont megtartása mellett a valószínűségi alaptérre tett végességi feltétel elhagyható. Az alább bemutatott igen egyszerűnek számító bizonyítás alapgondolatát tekintve nem sokban különbözik a már bemutatott bizonyításoktól, de feltételezi a mértékelmélet és az absztrakt analízis ismeretét.[25] Ebben az alpontban tehát az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ általános valószínűségi mező és $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ véges időhorizontú, de minden más szempontból tetszőleges filtráció, és $(S(t))_{t=0}^{T}$-adaptált folyamat. Vezessük be az

$$R \doteq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} [S(t) - S(t-1)]\theta(t) \right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül. Az analízisben megszokott módon L_+^0 jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be az $A \doteq R - L_+^0$, valamint a $cl(A)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő.[26] Diszkrét, véges időhorizont esetén az eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő:[27]

3. tétel. (Dalang–Morton–Willinger.) *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \cap L_+^0 = \{0\}$.

2. $A \cap L_+^0 = \{0\}$ és $A = cl(A)$.

3. $cl(A) \cap L_+^0 = \{0\}$.

4. Megadható olyan **Q** *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* **P** *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az S martingál..*

A megadott definíciók alapján evidens, hogy az első feltétel éppen az arbitrázs kizárásának már korábban tárgyalt feltétele, ugyanis az első állítás szerint nincsen olyan θ előrejelezhető stratégia, amelyre a $\sum_{t=1}^{T}[S(t)-S(t-1)]\theta(t)$ kummulált nyereség nem negatív és egy pozitív valószínűségű halmazon pedig pozitív.

A tétel bizonyítása néhány lemmára épül. Az első az elemi analízisből ismert kompaktsági tétel[28] általánosítása.[29]

1. lemma. *Legyen* $(\eta_n)_n$ $\mathbf{R}^m$ *értékű mérhető függvények sorozata, és tegyük fel, hogy*

$$\liminf_n \|\eta_n\| < \infty.$$

Ekkor megadható olyan $(\sigma_k)_k$ *egész értékű mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre* $\sigma_k \nearrow \infty$ *és az* $(\eta_{\sigma_k})_k$ *sorozat minden kimenetelre konvergens.*

[24] Az eszközárazás első alaptételét véges számú kimenetel esetén szokás Harrison–Pliska-tételnek is nevezni.

[25] A továbbiakban a Dalang–Morton–Willinge-tételre nem fogunk hivatkozni, így az alpontot a megfelelő analízisismeretekkel nem rendelkező olvasó elhagyhatja.

[26] Megjegyezzük, hogy mivel minden sztochasztikusan konvergens sorozat tartalmaz majdnem mindenhol konvergens részsorozatot, ezért a *cl* lezárás majdnem mindenhol értelemben is vehető.

[27] Az állítást a diszkontált alakra mondjuk ki. A diszkontálás bevezetése az önfinanszírozó portfoliókon keresztül a már bemutatott módon hajtható végre. A bizonyítás *Kabanov–Stricker* [2001] dolgozatban közölt bizonyítás további egyszerűsítése. Érdemes megjegyezni, hogy az állítást korábban „nehéz tételnek” tartották. Vö. *Elliott– Kopp* [2000]. Az itt közölt bizonyítás lényegében elemi. Utólagos visszatekintéssel a Dalang–Morton–Willinger-tételt a matematikai közgazdaságtan elemi tételei közé kell besorolni.

[28] A Bolzano–Weierstrass-tétel.

[29] Pontosabban annak a Bolzano–Weierstrass-tétellel ekvivalens elemi állításnak az általánosítása, hogy amennyiben egy sorozatnak a limes inferiorja véges, akkor a limes inferior egy alkalmas részsorozat határértéke.

A lemma bizonyítása. Legyen először $(\eta_n)_n$ skalárértékű sorozat, és tegyük fel, hogy az $\eta_\infty \doteq \lim\inf_n \eta_n$ minden kimenetelre véges. Legyen $\tau_0 = 0$, és vezessük be a

$$\tau_k \doteq \inf\left\{n > \tau_{k-1} : |\eta_n - \eta| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

függvényeket. Elemi megfontolásokkal azonnal belátható, hogy a τ_k mindek k-ra mérhető, és triviálisan $\eta_{\tau_k} \to \eta_\infty$. A gondolatmenetet az $\|\eta_n\|$ sorozatra alkalmazva, a feltétel miatt megadható olyan $(\tau_k)_k$ sorozat, amelyre

$$\sup_k \|\eta_{\tau_k}\| < \infty.$$

A korlátosság miatt a már „megritkított" sorozat minden koordinátájára és minden kimenetelre külön-külön létezik a limes inferior, tehát az előző gondolatmenetet m-szer megismételve a $(\sigma_k)_k$ indexsorozatot egyszerű, véges lépésből álló iterációval megkaphatjuk.

Megjegyezzük, hogy mivel a $(\sigma_k)_k$ sorozat tagjai mérhetőek, ezért elemi megfontolásokkal azonnal igazolható, hogy az $(\eta_{\sigma_k})_k$ sorozat tagjai mérhetők maradnak.

A bizonyítás következő lépése a szeparációs tétel végtelen dimenziós alkalmazását tartalmazza.

2. lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *tetszőleges valószínűségi mező. Legyen* K *az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *téren értelmezett integrálható függvényekből álló* L^1 *tér olyan zárt, konvex kúpja, amelyre* $K \supseteq (-L^1_+)$, *és* $K \cap L^1_+ = \{0\}$. *Ekkor az* $(\Omega, \mathcal{A})$ *téren létezik olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűségi mérték, amely ekvivalens*[30] *az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, és amelyre*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty,$$

és

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) = \int_\Omega k d\mathbf{Q} = \int_\Omega k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\mathbf{P}}\left(k \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \leq 0, \qquad k \in K.$$

A lemma bizonyítása. Az L^1 duálisa L^∞, tehát az L^1 téren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok alkalmas L^∞ függvény segítségével integrálként reprezentálhatók, vagyis minden az L^1 téren értelmezett z folytonos, lineáris funkcionálnak egyértelműen megfeleltethető egy olyan, szintén z-vel jelölt L^∞-beli elem, amelyre tetszőleges $l \in L^1$ esetén

$$\langle z, l\rangle = \int_\Omega zl d\mathbf{P}.$$

Legyen Z az olyan folytonos, lineáris funkcionálok halmaza, amelyek nem negatívok a K kúpon. Mivel $0 \in Z$, ezért $Z \neq \emptyset$. Jelölje $\mathcal{Y}$ a Z elemeinek tartóhalmazaiból álló halmazt, vagyis $Y \in \mathcal{Y}$, ha van olyan $z \in Z$, hogy $Y = \{z > 0\}$. Triviálisan az $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható egyesítésre, ugyanis ha $z_n \in Z$, akkor alkalmas α_n pozitív konstansokkal $\sum_n \alpha_n z_n \in Z$. Ha

[30] Emlékeztetünk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{Q}(A) = 0$ vagyis a nulla valószínűségű események halmaza a két mérték esetében egybeesik. Természetesen a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ekvivalens, ha a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ létezik és pozitív.

$$\lambda_0 = \sup \{\mathbf{P}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\},$$

akkor van olyan $(Y_n)_n$ sorozat, amelyre $\mathbf{P}(Y_n) \nearrow \lambda_0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $(Y_n)_n$ monoton nő, és miként az imént megjegyeztük, $Y_0 \doteq \cup_n Y_n \in \mathcal{Y}$, tehát $\mathbf{P}(Y_0) = \lambda_0$. Az állítást belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\lambda_0 = 1$, ugyanis akkor találtunk egy olyan $z_0 \in \mathcal{Z}$ elemet, vagyis egy olyan $z_0 \in L^\infty$ függvényt, amelyre $\langle z, K\rangle \leq 0$, és amelyre $\mathbf{P}(z_0 > 0) = 1$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(Y_0) < 1$, és vegyük az $x \doteq \chi_{Y_0^c} \in L^1_+ \setminus \{0\}$ függvényt. Mivel a K zárt, konvex halmaz és $x \notin K$, ezért a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn–Banach-tétel, szerint található az L^1 téren értelmezett olyan z_x folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\langle z_x, x\rangle > \langle z_x, k\rangle, \qquad k \in K. \tag{6}$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_B \in L^1_+$, ezért $z_x \geq 0$, ugyanis ha egy pozitív mértékű E halmazon $z_x < 0$, akkor a $-s\chi_E \in -L^1_+ \subseteq K$ halmazon

$$\left\langle z_x, -s\chi_E \right\rangle = -s\int_E z_x d\mathbf{P} > 0,$$

ami az s növelésével tetszőlegesen naggyá tehető, következésképpen a (6) szeparációs egyenlőtlenség nem teljesülne. Mivel $k = 0 \in K$, ezért $\langle z_x, x\rangle > 0$, vagyis $\int_\Omega z_x x d\mathbf{P} > 0$, tehát a z_x tartója része az x tartójának, ami ellentmond a $\mathbf{P}(Y_0)$ maximalitásának.

Végezetül térjünk rá a tétel bizonyítására!

A tétel bizonyítása. A bizonyítást több lépésre bontjuk. Megjegyezzük, hogy most is a konvex halmazok szeparációs tételét akarjuk alkalmazni. A bizonyítás nehézsége abban áll, hogy biztosítanunk kell az elválasztandó halmazok zártságát. Ebből kifolyólag a bizonyítás érdemi lépése az első lépés.

1. A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül. Legyen először $T = 1$. Vegyünk egy $a_n \in A$ sorozatot, és tegyük fel, hogy $a_n \to a$, ahol a konvergencia mint sztochasztikus konvergencia értendő. Meg kell mutatnunk, hogy $a \in A$. Az A definíciója szerint

$$a_n = [S(1) - S(0)]\ \theta_n(1) - r_n,$$

ahol a $\theta_n(1)$ $\mathcal{F}_0$ mérhető és $r_n \in L^0_+$. Vegyük észre, hogy a bizonyítás nehézsége pusztán abból áll, hogy az $(a_n)_n$ konvergenciájából nem következik a $(\theta_n(1))_n$ konvergenciája.[31] Vegyük észre, hogy ha $\Omega_k \in \mathcal{F}_0$ az Ω véges számú halmazból álló partíciója, akkor az állítást elég az Ω_k halmazokon külön-külön belátni. Az Ω teret bontsuk fel úgy, hogy a partíció minden részhalmazának minden kimenetelére az $[S(1) - S(0)]$ ugyanazon oszlopai alkotják az $[S(1) - S(0)]$ oszlopvektorterének bázisát. A lineárisan összefüggő oszlopokat elhagyva, a $\theta_n(1)$ stratégiát helyettesítsük a bázisvektorokra vonatkozó koordinátákkal. Vezessük be a $\theta \doteq \liminf_n \|\theta_n(1)\|$ változót, és legyen $\Omega_1 \doteq \{\theta < \infty\}$. Az első lemma szerint alkalmas $(\sigma_k)_k$ részsorozatra az Ω_1 halmazon a $(\theta_{\sigma_k}(\omega))_k$ $\mathcal{F}_0$-mérhető, és minden ω-kimenetelre a $(\theta_n(\omega))_n$ konvergens részsorozata. Mivel mérhető függvények határértéke mérhető, ezért a $(\theta_{\sigma_k})_k$ sorozat θ_∞ határértéke szintén $\mathcal{F}_0$-mérhető. Evidens módon az $(r_{\sigma_k})_k$ sorozat szintén konvergens, és az r_∞ határértéke nem negatív, tehát

$$a_\infty = [S(1) - S(0)]\ \theta_\infty(1) - r_\infty \in A.$$

[31] Érdemes hangsúlyozni, hogy pontosan ez a probléma lép fel akkor, amikor azt kell igazolni, hogy minden véges kúp zárt. A következő bizonyítás ennek az igen fontos állítás bizonyításának az általánosítása.

Vegyük a $\Omega_2 \doteq \{\theta = \infty\}$ halmazt. A θ_n (1), illetve r_n helyett tekintsük a

$$\frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|}, \quad \frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|}$$

normalizált sorozatokat. Ω_2 definíciója miatt

$$\frac{a_n}{\|\theta_n(1)\|} = [S(1) - S(0)]\frac{\theta_n(1)}{\|\theta_n(1)\|} - \frac{r_n}{\|\theta_n(1)\|} \to 0.$$

Ismételten a lemma miatt feltehető, hogy a $\theta_n(1) / \|\theta_n(1)\|$ konvergens, tehát alkalmas $\theta_\infty \in \mathcal{F}_0$ és r_∞ elemekre

$$[S(1) - S(0)]\ \theta_\infty - r_\infty = 0.$$

Az első feltétel szerint $[S(1) - S(0)]\ \theta_\infty = 0$, vagyis $r_\infty = 0$. Ugyanakkor $\theta_\infty \neq 0$, ami ellentmond annak, hogy az $[S(1) - S(0)]$ oszlopai lineárisan függetlenek, következésképpen $\Omega_2 = \emptyset$. Ezzel a $T = 1$ esetben az A zártságát igazoltuk. Tegyük fel, hogy az állítást már $T - 1$ időpont esetén beláttuk, és legyen

$$a_n = \sum_{t=1}^{T}[S(t) - S(t-1)]\theta_n(t) - r_n \to a.$$

Ha $\theta_n(T)$ $\mathcal{F}_{T-1}$ mérhető, akkor az $[S(T) - S(T-1)]\ \theta_n(T) \in R$, tehát az előző gondolatmenetet megismételve feltehető, hogy a $\theta_n(T)$ konvergens. Az indukciós feltételt a

$$\sum_{t=1}^{T-1}[S(t) - S(t-1)]\theta_n(t) - r_n$$

kifejezésre felhasználva, az állítás evidens.

2. A második állításból triviálisan következik a harmadik.

3. Megjegyezzük, hogy tetszőleges η változó esetén a $\mathbf{P}$ valószínűségi mező megválasztható úgy, hogy az η integrálható lesz. Elég például a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \doteq C\int_A \exp(-\|\eta\|)d\mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$-vel ekvivalens teret venni.[32] Mivel a tételben szereplő állítások érvényben maradnak, ha ekvivalens valószínűségre térünk át,[33] ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S folyamat minden időszakban integrálható. Mivel az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $K \doteq cl(A) \cap L^1$ kúp zárt az L^1 térben, és a feltétel szerint $K \cap L^1_+ = \{0\}$, így a második lemmában szereplő szeparációs tétel alapján van olyan $\mathbf{Q}$ ekvivalens mérték, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$, és amelyre

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(k) \leq 0, \qquad k \in K.$$

Speciálisan, ha vesszük a $k = \pm[S(t) - S(t-1)]\theta(t)$ elemeket, ahol a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$ mérhető, akkor

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([S(t) - S(t-1)]\ \theta(t)) = 0,$$

[32] Az $x \exp(-|x|)$ függvény korlátos, vagyis az áttérést biztosító Radon–Nikodym-deriváltat korlátos.

[33] A sztochasztikusan konvergens sorozatok pontosan azok, amelyek rendelkeznek majdnem mindenhol konvergens részsorozattal. Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol konvergens sorozatok halmaza azonos.

amiből

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(S(t) - S(t-1) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0,$$

vagyis az S martingál a **Q** alatt, következésképpen a harmadik állításból következik a negyedik.

4. Végezetül tegyük fel, hogy teljesül a negyedik állítás, vagyis van olyan **Q** a **P**-vel ekvivalens mérték, amely mellett az S martingál. Ha $h \in A \cap L_{+}^{0}$, akkor van olyan θ előrejelezhető startégia, amelyre

$$0 \le h \le \sum_{k} [S(t) - S(t-1)]\theta(t).$$

A **Q**-martingál tulajdonság szerint

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left([S(t) - S(t-1)]\ \theta(t)\right) = 0,$$

következésképpen

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(h) = 0,$$

amiből a $h \geq 0$ felhasználásával a h **Q** majdnem minden kimenetelre nulla. Mivel a **P** és a **Q** ekvivalensek, ezért a h **P** majdnem mindenhol nulla, így teljesül az első állítás.

Árazás többperiódusos modellekben

Legyen H $\mathcal{F}_T$ mérhető valószínűségi változó. Mi a H ára a $t = 0$ pontban? A H változót, más néven európai derivatívát, feltételes követelést, származtatott terméket[34] elérhetőnek mondjuk, ha van olyan θ önfinaszírozó, előrejelezhető portfóliósorozat, amelyre

$$V(T) = H.$$

A θ neve *hedge* vagy replikáló stratégia, portfólió. A H származtatott termék $\pi(H)$ ésszerű, egyensúlyi ára természetesen $V(0)$, ugyanis ha nem az lenne, akkor értelemszerűen lehetne arbitrálni. Ha $\pi(H) < V(0)$, vagyis a H származtatott termék olcsó, és a replikáló portfólió drága, akkor a „közgazdaságtan alaptörvényének" megfelelően vegyük meg a származtatott terméket, és adjuk el a replikáló portfóliót. A $t = 0$ pontban a nettó mérleg $V(0)$ bevétel, $\pi(H)$ kiadás, vagyis pozitív, a T időpontban a bevétel $H,$ a kiadás szintén $H,$ vagyis a nettó eredmény nulla. Nem túl meglepő módon, ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, vagyis ha a változók értéke a $t = 0$ időpontban konstans, nem függ a véletlentől, akkor

$$V(0) = \pi(H) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{1}{S_T} H\right) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{H}), \tag{7}$$

vagyis a H ára a H diszkontált várható értéke, ahol a várható értéket a **Q** kockázatmentes valószínűség mellett kell venni. A (7) indoklása a következő. Mivel az $\overline{S}$ **Q**-martingál, ezért a

$$\overline{G}(t) \doteq \sum_{s=1}^{t} [\overline{S}(s) - \overline{S}(s-1)]\theta(s)$$

transzformált is martingál, ugyanis

[34] A származtatott termék elnevezést az indokolja, hogy a H $\mathcal{F}_T$ mérhető, vagyis az értéke T időszakban ismert információk alapján meghatározható.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{G}(t+1) \mid \mathcal{F}_t) &= \sum_{s=1}^{t+1} \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}([\overline{S}(s)-\overline{S}(s-1)]\theta(s) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}([\overline{S}(s)-\overline{S}(s-1)]\theta(s) \mid \mathcal{F}_t) + \\ &\quad + \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}([\overline{S}(t+1)-\overline{S}(t)]\theta(t+1) \mid \mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Az első tagban minden kifejezés legfeljebb t indexű, tehát az egész kifejezés $\mathcal{F}_t$-mérhető, így a feltételes várható értéke önmaga. A második kifejezésben mivel a θ $(t + 1)$ előrejelezhető, ezért kivihető a feltételes várható értékből, majd az $\overline{S}$ **Q**-martingál tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}([\overline{S}(t+1)-\overline{S}(t)]\theta(t+1) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{S}(t+1)-\overline{S}(t) \mid \mathcal{F}_t)\cdot\theta(t+1) = \\ &= 0\cdot\theta(t+1) = 0.\end{aligned}$$

A martingál őrzi a várható értéket, ezért, felhasználva, hogy a $V(0)$ determinisztikus, $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{G}(T)) = 0$ az (5) felhasználásával

$$\begin{aligned}V(0) &= \overline{V}(0) = \overline{V}(0) + \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{G}(T)) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{V}(0) + \overline{G}(T)) = \\ &= \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{V}(T)) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{H}) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{1}{S_T}H\right)\end{aligned}$$

Érdemben sehol sem használtuk ki, hogy a $t = 0$ időpontot vizsgáljuk, csak az

$$\frac{1}{S(T)}H = \overline{V}(T) = \sum_{t=1}^{T}[\overline{S}(t)-\overline{S}(t-1)]\theta(t) + \overline{V}(0)$$

előállítást, valamint a **Q**-martingál tulajdonságot, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{1}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right) &= \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{V}(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\overline{G}(T) + \overline{V}(0) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= \overline{G}(T) + \overline{V}(0) = V(t) = \frac{V(t)}{S(t)},\end{aligned}$$

következésképpen

$$V(t) = \mathbf{M}^{\mathrm{Q}}\left(\frac{S(t)}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{8}$$

Egyértelműség, teljesség a többperiódusos modellekben

Térjünk vissza a diszkrét valószínűségi mező esetére! Kétfajta egyértelműség vethető fel.

1. Vajon az árak egyértelműek-e, vagyis függnek-e a replikáló portfóliótól vagy a martingálmértéktől?

2. Vajon a martingálmérték egyértelmű-e? Az első kérdés tűnik érdekesebbnek, de a megoldása triviális. Ha léteznek a replikáló portfóliók, akkor az azokhoz tartozó értékfolyamatok egyértelműek. Legyen θ_1 és θ_2 két replikáló portfólió, vagyis tegyük fel, hogy

$$V(T,\theta_1) = V(T,\ \theta_2) = \mathrm{H}.$$

Ha nincs arbitrázs, akkor van legalább egy ekvivalens martingálmérték. A korábban bemutatott (8) formula alapján

$$S(t)\theta_1(t) \doteq V(t,\theta_1) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S(t)}{S(T)}H \mid \mathcal{F}_t\right) = V(t,\theta_2) \doteq S(t)\theta_2(t),$$

vagyis a replikáló értékfolyamat egyértelmű, bár a replikáló stratégia nem feltétlenül az. Ezt a tulajdonságot szokás az egyértelmű árazás törvényének is nevezni. Érdemes megjegyezni, hogy mivel a replikáló portfóliófolyamat értéke független a replikációt biztosító stratégiától, ezért a replikáló portfólió értéke független a választott $\mathbf{Q}$ martingálmértéktől is. Ebből következően a replikálható követelések értéke minden martingálmértékre azonos.

Most térjünk rá a martingálmérték egyértelműségére!

9. definíció. *A modellt teljesnek mondjuk, ha minden H $\mathcal{F}_T$-mérhető származtatott termék önfinanszírozó portfólióval replikálható.*

Érvényes a következő tétel.

4. tétel. (Az eszközárazás második alaptétele.) *A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. Legyen

$$L \doteq \{V(T,\theta)\},$$

ahol θ tetszőleges önfinanszírozó, előrejelezhető portfólió. Ha a piac nem teljes, akkor $L \neq \mathbb{R}^N$.Világos, hogy ha a piac nem teljes, akkor a diszkontált piac sem teljes, vagyis

$$\overline{L} \doteq \{\overline{V}(T,\theta)\} \neq \mathbb{R}^N.$$

A már belátott módon a diszkontált folyamat előállítása alapján tetszőleges θ önfinanszírozó portfólióra

$$\begin{aligned}\overline{V}(T,\theta) &= \overline{V}(0,\theta) + \sum_{t=1}^{T}[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\theta(t) \doteq \\ &\doteq \lambda + \sum_{t=1}^{T}[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t),\end{aligned}$$

ahol $\overline{\theta}$ a θ-ból a 0 index törlésével kapott folyamat. Ugyanakkor, ha λ tetszőleges és $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető folyamat a közönséges 1, 2, …, M indexű termékre, akkor a 0 komponens megválasztásával konstruálható olyan θ önfinanszírozó, előrejelezhető portfólió, amelyre $\overline{V}(0,\theta) = \lambda$, és a többi termék súlya $\overline{\theta}$. Tehát

$$\overline{L} \doteq \{\overline{V}(T,\theta)\} = \left\{\lambda + \sum_{t=1}^{T}[\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t)\right\} \neq \mathbb{R}^N,$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető folyamat. Legyen $\mathbf{Q} > 0$ egy martingálmérték, és vezessük be az $\mathbb{R}^N$ téren az

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \doteq \sum_{i=1}^{N} x_i y_i Q_i$$

skaláris szorzatot. Mivel az $\overline{L}$ altér, $\overline{L} \neq \mathbb{R}^N$, ezért létezik

$$\mathbf{z} \perp \overline{L},$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{N} z_i l_i Q_i = \sum_{i=1}^{N} (z_i l_i) Q_i = 0,$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}\overline{L}) = 0.$$

A kötvényre tett feltétel szerint, ha $\overline{\theta}(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$, akkor $\mathbf{1} \in \overline{L}$, tehát

$$(\mathbf{z},\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{N} z_i Q_i = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{z}) = 0.$$

Legyen

$$\mathbf{d} \doteq \mathbf{1} + \frac{\mathbf{z}}{2\|\mathbf{z}\|_\infty} > 0,$$

és definiáljuk az

$$R_i \doteq R(\omega_i) = \mathbf{d}(\omega_i) Q(\omega_i) = d_i Q(\omega_i)$$

szabállyal az **R** valószínűséget. Világos, hogy $\mathbf{R} > 0$, és

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{z})}{2\|\mathbf{z}\|_\infty} = 1,$$

tehát az **R** ekvivalens valószínűség. Mivel tetszőleges $\overline{\theta}$ előrejelezhető folyamatra

$$\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\theta(t) \in \overline{L},$$

ezért

$$\mathbf{M}^{\mathbf{R}}\left(\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t)\right) \doteq$$

$$= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t)\left(1 + \frac{\mathbf{z}}{2\|\mathbf{z}\|_\infty}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} [\overline{S}(t) - \overline{S}(t-1)]\overline{\theta}(t)\right).$$

Mivel az $\overline{S}$ martingál a **Q** alatt, és a $\overline{\theta}$ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés nulla, ezért a bal oldal is nulla, tehát az $\overline{S}$ diszkontált folyamat $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű.

Árazás nem teljes piacokon

Mit lehet mondani a véletlen követelés árára, ha a piac nem teljes, és az értékelendő követelés nem replikálható? Ilyenkor az arbitrázs kizárásának elve csak korlátokat ad a lehetséges piaci árakra, a pontos piaci ár már egyéb tényezők függvénye. A közgazdasági elmélet szerint általában a termékek árát a kereslet és a kínálat viszonya adja meg, amely viszont függ a piaci szereplők preferenciájától. Az irodalomban az arbitrázs kizárására alapuló árazási elv több általánosításával is találkozhatunk. Ezek mindegyikének lényege, hogy az önfinanszírozó porfólióval való replikálhatóság feltételét valamilyen módon enyhíteni kell. Vagy nem követeljük meg a pontos replikálhatóságot, vagyis megelégszünk azzal, hogy a fedező portfólió valamilyen értelemben optimálisan közelíti a véletlen követelést, vagy megköveteljük ugyan, hogy az utolsó időpontban a követelés lefedezése tökéletes legyen, de eltekintünk attól, hogy a replikáló portfóliósorozat önfinanszírozó legyen, és valamilyen értelemben minimilizáljuk a jövőben felmerülő költségeket. A nem teljes piacok árazási elmélete igen kiterjedt, ezért csak a legegyszerűbb modellt mutatjuk be.

Tegyük fel, hogy a T időpontban esedékes H véletlentől függő követelés nem replikálható. Tekintsük a

$$\begin{gathered} V(0,\theta) = S(0)\,\theta(1) \to \min \\ S(t)\,[\theta(t) - \theta(t+1)] \geqq 0, \quad t = 1,\dots,T-1 \\ S(T)\,\theta(T) \geqq H \end{gathered}$$

lineáris programozási feladatot. Ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a feladat $\pi^*(H)$ optimális értéke legyen $+\infty$. Világos, hogy a H követelés $\pi(H)$ ára nem lehet nagyobb mint $\pi^*(H)$, ugyanis, $\pi(H) > \pi^*(H)$, akkor lehet arbitrálni. Ilyenkor H „drága”, tehát eladom, a θ stratégia „olcsó”, tehát dinamikusan megveszem. A $t = 0$ pontban a bevétel $\pi(H) - \pi^*(H) > 0$, a T időpontban a bevétel $S(T)\,\theta(T)$ a kiadás H, tehát a T időpontban a nettó bevétel

$$S(T)\,\theta(T) - H \geqq 0.$$

Az $1 \leq t \leq T - 1$ időpontokban, az új $\theta(t+1)$ portfólió meghatározásakor csak kivehettük a pénzt a „kasszából”, így a H *versus* θ „üzlet” szaldója pozitív. Vehetjük azonban a

$$\begin{gathered} V(0,\theta) = S(0)\,\theta(1) \to \max \\ S(t)\,[\theta(t) - \theta(t+1)] \leqq 0, \quad t = 1,\dots,T-1 \\ S(T)\,\theta(T) \leqq H \end{gathered}$$

feladatot is. A feladat $\pi_*(H)$ optimális megoldása alsó korlátot jelent a $\pi(H)$ árra nézve. Ha $\pi(H) < \pi_*(H)$, akkor megveszem a H jövőbeli kifizetést, eladom a θ optimális stratégiát. A $t = 0$ bevétele $\pi_*(H) - \pi(H) > 0$, a T időpont bevétele $0 \leqq H - S(T)\,\theta(T)$, és időközben most is csak kivehetünk pénzt a portfólióból. Összefoglalva, arbitrázsmegfontolások alapján

$$\pi_*(H) \leqq \pi(H) \leqq \pi^*(H).$$

Legyen $\mathbf{Q}$ martingálmérték! Evidens módon a lineáris programozási feladatokban mindig vehetjük a diszkontált változókat, ugyanis a feltétel szerint a kötvény ára mindig pozitív, vagyis a végigosztás nem befolyásol semmit. Ha θ^* optimális megoldása a minimumfeladatnak, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}) &\leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\overline{S}(T)\theta^*(T)) \leqq \\ &\leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T)\theta^*(T) + \sum_{t=1}^{T-1}\overline{S}(t)[\theta^*(t) - \theta^*(t+1)]\right) = \\ &= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}([\overline{S}(T) - S(T-1)]\theta^*(T) + \dots) = \\ &= \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\overline{S}(0)\theta^*(1)) = \overline{S}(0)\theta^*(1) = S(0)\theta^*(1) = \pi^*(H), \end{aligned}$$

illetve analóg módon $\pi_*(H) \leqq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}(\overline{H})$.

Hivatkozások

Dalang, R. C.–Morton, A.–Wilinger, W. [1990]: Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model. Stochastics and Stochastic Reports, 29. 185–201. o.

Delbaen, F. [1999]: The Dalang–Morton–Willinger theorem. Kézirat, lásd: www.math.ethz.ch/~delbaen.

Duffie, D. [1988]: Security Markets, Stochastic Models. Academic Press, San Diego.

Elliott, R. J.–Kopp, P. E. [2000]: Pénzpiacok matematikája. Typotex Kiadó, Budapest.

Kabanov, Y.–Stricker, C. [2001]: A teachers' note on no-arbitrage criteria. Séminaire de Probabilités, XXXII, 143–151. o.

Ross, S. [1999]: An Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics. Cambridge University Press.

Schachermayer, W. [1992]: A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. Insurance: Math Econ., 11. 1–9. o.

Shiryaev, A. N. [1999]: Essentials of Stochastic Mathematical Finance. World Scientific, Szingapúr.

Szász János [1999]: Tőzsdei opciók. Tanszék Kft., Budapest.