Közgazdasági Szemle, XLVIII. évf., 2001. április (307–319. o.)

MEGYERI KRISZTINA

A pénz mint általános csereeszköz modellezése

A tanulmány a pénz csereeszköz-funkciójának modellezését mutatja be, a szakirodalomban keresési egyensúlyként ismert, bilaterális cseréken alapuló gazdaság keretei közt. Egy ilyen gazdaságban a szereplők személyes találkozásaik során szerzik meg a számukra szükséges javakat, szemben a walrasi egyensúlyelmélet centralizált elosztásával. Míg a walrasi egyensúlyelméletben probléma a pénz egyensúlyban való használata – különböző külső feltételek bevezetése szükséges hozzá –, addig ebben a struktúrában egy jószág endogén módon válik pénzzé. A modellhez általunk készített szimulációs futtatásoknak az volt célja, hogy az analitikus úton kapott eredményeket teszteljük tovább: kiderítsük mennyi időre van szüksége a rendszernek az egyensúly kialakulásához, hogyan alakul a gazdasági szereplők helyzete az egyensúlyhoz vezető úton.*

Mi a közgazdasági pénz?

A közgazdaságtani modellekben a pénz szerepét egy olyan *jószág* tölti be, amely meghatározott *funkciókkal* rendelkezik. Abban, hogy melyek ezek a funkciók, az irodalom többé-kevésbé egységes (*Tobin* [1991]). A pénz a gazdaságban egyrészt *elszámoló egységként* (értékmérő, ármérce) működik, vagyis technikailag olyan elszámolási rendszert nyújt, amelyben az árak – mind a javaké, mind a szolgáltatásoké, vagy a halasztott fizetéseké – kifejezhetők. Másodsorban *csereeszközként* funkcionál (fizetési vagy forgalmi eszközként), azaz a pénz valamely tranzakciót zár le, illetve elfogadják a csere során ellentételezésként.[1] A pénz harmadik feladata a *felhalmozási eszköz* (értékőrző) funkció, vagyis a pénz alkalmas arra, hogy a gazdasági szereplők aktívaállományában szerepeljen.

A közgazdaságtanban pénznek tekinthető az az objektum, ami a fenti három funkciót egyidejűleg ellátja.[2] A közgazdasági pénzmodellek azonban inkább tekinthetők egy-egy pénzfunkció modelljének, semmint valódi pénzmodellnek.

* A tanulmány a Kopint–Datorg Konjunktúra Kutatási Alapítvány által támogatott kutatás keretében készült. A szerző köszönetet mond *Benedek Gábor*nak a szimulációs rész elkészítésében nyújtott segítségéért.

[1] Érdemes megemlíteni, hogy *Weber* [1922], illetve *Marx* [1867] még két különálló – csere és fizetési eszköz – funkcióról beszél, a mai szakirodalom azonban háttérbe szorult ez a megkülönböztetés.

[2] Ez persze nem jelenti azt, hogy a pénz feltétlenül fizikai tárgy, így például az elektronikus számlapénzt is pénznek tekintjük.

A cikk megjelenését a Közgazdasági Szemlében a Magyar Vállalatgazdasági Kutatásokért Alapítvány támogatta.

Megyeri Krisztina a BKÁE PhD hallgatója.

A pénz modellezésének jelenlegi állása

Az általános egyensúlyi modellek még mai is az elméleti kutatások homlokterében állnak, de míg a nem monetáris megközelítésekben biztató fejlődés és viszonylagos konszenzus látszik, addig a monetáris oldalon komoly vitákkal találkozunk.

A *Walras-modell* a javak egyensúlyi cseréinek problémájára ad megoldást. A pénz mint belső érték nélküli jószág ugyanolyan szerepet tölt be a modellben, mint a többi árucikk. Ezzel a feltételezéssel lehetővé vált, hogy a pénzmennyiség tartásáról hozott döntések vizsgálata is a határhaszon-elemzés alapján történjék, azaz a monetáris elmélet beágyazható legyen az értékelméletbe, a választások általános elméletébe (*Hicks* [1935], *Patinkin* [1965]). A szereplőknek azonban semmi okuk sincs arra, hogy egy valójában bartergazdaságként működő rendszerben ezt a jószágot tartsák. Ebben a modellben a szerepeltetett pénzjószág pusztán elszámolóeszköz-funkciót tölti be, hiszen nem is lehet más szerepe egy idődimenzió nélküli centralizált gazdaságban. *Hahn* [1965] egzakt elemzést ad arra, hogy egy ilyen környezetben miért nem fognak a szereplők egyensúlyban pénzt tartani.

Egy lehetséges út a hagyományos költségvetési korlát felülvizsgálata, azáltal hogy a vásárolt javak értéke nem haladhatja meg a kezdőkészlet értéket – ez az úgynevezett *készpénzelőleg (cash in advance)* vagy a Clower-feltétel, vagyis a pénz használatának előírása a cserék során (*Clower* [1967]). A bartercserék alsóbbrendűek, mint a pénz közvetítésével zajló cserék. Természetesen e pótlólagos monetáris feltétel felveti a kérdést, hogy egyáltalán miért szükséges ez, ha a pénz használata valójában hasznos a szereplők számára.

A *Hahn-modell* alapötlete a pénz idődimenziójának felismerésén alapul (*Hahn* [1973]). Szemben az általános egyensúlyi modellel, a piacokat nem egyszer nyitják meg, amikor is lezajlanak a prompt ügyletek, illetve megkötik a határidős szerződéseket, hanem szekvenciálisan nyitják-zárják őket. Milyen indok szól a piacok újbóli megnyitása mellett, hiszen a jövőbeli ügyletek is megköthetők határidős szerződések formájában? A piacok újbóli megnyitásával a (majdani) spot piacokon olyan ügyletek is megköthetők, amelyek a magas tranzakciós költségek miatt elmaradtak volna. Azonban ebben a modellben is csak pótlólagos feltételek bevezetésével biztosítható, hogy a kialakuló monetáris egyensúly Pareto-hatékony legyen.

A pénz használatában mutatkozó probléma forrását a *centralizált gazdaság struktúrája*, illetve a *pénz csereeszköz-funkciója* kettős követelményben kell keresni.

Erre a kérdésre a *decentralizált cseréken*[3] alapuló gazdaságok természetükből adódóan nyújtanak megoldást. Egy ilyen gazdaságban a cserék nem egy kikiáltón keresztül valósulnak meg, hanem bilaterálisan zajlanak. A gazdasági szereplők közti csere oka kétféle lehet.

1. A csere folytán mindkét fél a számára belső használati értékkel rendelkező jószágot szerzi meg keresletének közvetlen kielégítése céljából. *Jevons* [1875] szerint ez – a csereszándékok kölcsönös egyezése – nem túl gyakori eset, még akkor sem, ha egyensúlyi árak mellett minden vevőhöz található eladni szándékozó szereplő.

2. Azért cserélnek közvetlenül nem használható javakat, mivel közvetett módon ezáltal megszerezhetik, amire szükségük van.

Vagyis a számukra szükséges jószág megszerzéséhez legalább két tranzakcióra van szükség. Ez látszólag növeli a problémát, ám a pénz mint csereeszköz megjelenítésével megoldhatóvá válik a szándékok egyezésekor fellépő kettős véletlen problémája.

[3] A koordinációs probléma bilaterális cserék szempontjából való első megközelítését lásd *Ostroy–Starr* [1973].

A modell

Tanulmányunk célja egy ilyen egyensúlyi modell bemutatása, amelyben egy objektum csereeszközzé válása endogén módon történik. Az alábbi *Kiyokati-Wright* [1989]-ben ismertett modellkörnyezet keresési egyensúly *(search equilibrium)* néven ismert a szakirodalomban. Az alkalmazott matematikai apparátus a dinamikus programozás, illetve a játékelmélet eszköztárára épít. Most ezt a modellt a szakirodalomban szokásosnál egzaktabb formában tárgyaljuk – ennek oka a szimulációs és az analitikus eszközök egyidejű alkalmazása.

A gazdaság jellemzése

A gazdaság végtelen sok diszkrét időszakon keresztül működik, a végtelen sok szereplő is végtelen ideig él. A szereplők minden időszak elején véletlenszerűen találkoznak, és ekkor nyílik lehetőség arra, hogy a náluk lévő javakat elcseréljék, amennyiben ez mindkettőjük számára kedvezőbb helyzetet eredményez. Miután a cserék lezajlottak az időszakban, a gazdasági szereplők a náluk lévő jószágot vagy elfogyasztják – és ekkor termelnek egy másikat –, vagy ha jobbnak látják, elraktározzák. Vagyis minden időszakban minden szereplőnél van valamilyen jószág.

Javak és szereplők

A gazdaságban véges típusú (J) jószág van, jelölje az állapotteret, esetünkben ez nem más, mint a jószágok listája:

$$\mathrm{X} = \{i{:}\,i.\text{jószág, ahol } i \in \mathrm{N}^{+}\}.$$

A javak fogyaszthatók, termelhetők és raktározhatók. Fontos megjegyeznünk, hogy minden esetben egységnyi mennyiségű jószágokat cserélnek, fogyasztanak, termelnek.

A szereplők az általuk fogyasztani kívánt javak alapján sorolhatók típusokba. Így tehát annyi fogyasztói típus van, ahányféle jószág. Tegyük fel, hogy a gazdasági szereplők minden típusban végtelen sokan vannak.

Ekkor az i. típusú szereplőt három dolog jellemzi:

1. fogyasztás: $U_i(j)$ a j. jószág fogyasztásából eredő hasznosság,
2. termelés: $-D_i(j)$ a j. jószág termelésének költsége,
3. raktározás: $-c_i(j)$ a j. jószág raktározásának költsége.

Az elemzés egyszerűsítése érdekében, az általánosság megsértése nélkül az i. típusú szereplő tekintetében élhetünk a következő egyszerűsítő feltételekkel:

1. $U_i(j) = \begin{cases} \mathrm{U}, & \text{ha } j=i \\ 0, & \text{ha } j \neq i \end{cases}$ ami nem jelent mást, mint hogy csak az i. típusú jószágot fogyasztja, és az ebből származó hasznossága U_i;
2. $-D_i(j) = \begin{cases} -D_i, & \text{ha } j=i^* \\ -\infty, & \text{ha } j \neq i^* \end{cases}$ vagyis csak az $i^* \neq i$ típusú jószágot termeli, aminek a „hasznossága” $-D_i$;
3. $-c_i(j) = \begin{cases} -c_{ij}, & \text{ha } j \neq i \\ -\infty, & \text{ha } j=i \end{cases}$ vagyis ha a $j \neq i$ típusú jószágot raktározza, akkor a „hasznossága” $-c_{ij}$;
4. egy adott típusú jószág raktározása minden típusú szereplő számára azonos költséggel jár;

5. $c_J > \ldots > c_2 > c_1$, vagyis a J. típusú jószág a legdrágább mindenki számára, míg az első típusú a legolcsóbb.

A modell teljes specifikálásához tartozik, hogy meghatározzuk, melyik típus, melyik jószágot termeli. Nyilván egy jószágot csak egytípusú szereplő termelhet. Ez azonban már azt jelenti, hogy n-féle jószág esetén $(n-1)!$ féle gazdaság képzelhető el.

A különböző típusú javak szereplők közti megoszlását jellemezze $\mathbf{p}(\mathrm{t}) = [\ldots p_{ij}(t)\ldots] \in \Re^{J^2+}$, ahol $p_{ij}(t)$ azt jelenti, hogy az i. típusú szereplő milyen arányban tart j. típusú jószágot magánál raktáron a t. periódus végén.

A $\mathbf{p}(\mathrm{t})$ vektor elemeire azonban a fentiekben, a szereplők viselkedésének meghatározásakor, igen erős megszorításokat tettünk. Tegyük ezeket most formálissá! Mivel az i. típusú szereplő, ha hozzájut egy i. típusú jószághoz, azt azonnal elfogyasztja, így sohasem fogja raktározni, vagyis $p_{ii}(t) = 0 \ \forall\ i$-re, $\forall\ t$-re.

Ugyanakkor a fenti $p_{ij}(t)$ nem jelent mást, mint hogy egy adott szereplő a véletlen találkozások során, ha találkozik egy i. típusú szereplővel – aminek a valószínűsége $\frac{1}{J}$, lévén, hogy feltettük, hogy minden típusban végtelen sok szereplő van –, akkor annál $p_{ij}(t)$ valószínűséggel lesz j. típusú jószág. Vagyis elfogadható, hogy, $\sum_{ij} p_{ij}(t) = 1$, vagyis bárkivel is találkozik, lesz nála valamilyen jószág.

A döntési probléma

Az i. szereplő intertemporális hasznossági függvénye a következő formában adható meg:

$$\max E\left\{\sum \beta^t \left[I_t^U(t) U_i - I_i^D(t) D_i - I_i^C(t) c_{ij}\right]\right\} = \max E\left[\sum \beta^t u_{ij}(t)\right],$$

ahol az egyenlet nem más, mint egy dinamikus programozási maximumfeladat speciális alakja, β diszkonttényező;

$$I_i^U: \begin{cases} 1, \text{ ha az } i. \text{ szereplő elfogyasztja az } i. \text{ jószágot} \\ 0, \text{ ha az } i. \text{ szereplő nem fogyasztja el az } i. \text{ jószágot} \end{cases}$$

$$I_i^D: \begin{cases} 1, \text{ ha az } i. \text{ szereplő megtermeli az } i^*. \text{ jószágot} \\ 0, \text{ ha az } i. \text{ szereplő nem termeli meg az } i^*. \text{ jószágot} \end{cases}$$

$$I_i^C: \begin{cases} 1, \text{ ha az } i. \text{ szereplő elraktározza a } j. \text{ jószágot} \\ 0, \text{ ha az } i. \text{ szereplő nem raktározza el az } j. \text{ jószágot} \end{cases}$$

$u_{ij}(t)$: átmeneti hasznosság, mekkora azonnali hasznossága van annak, ha az i. szereplő szert tesz a t. periódusban a j. jószágra.

A csere mechanizmusa

A gazdasági szereplők minden periódus elején véletlenszerűen találkoznak egymással, és lehetőségük nyílik a cserére. Minden szereplő döntési stratégiát választ, a többiek döntése, illetve $\mathbf{p}(\mathrm{t})$ függvényében, hogy a várható hasznosságát maximalizálja. A szereplők stratégiáját végül is csak két tényező fogja meghatározni: milyen jószág van a birtokukban, illetve a cserepartnere mit ajánlott fel. Az i. szereplő kereskedési stratégiáját jelölje:

$$\pi_i(j,k) = \begin{cases} 1, \text{ ha az } i. \text{ szereplő elcseréli a nála lévő } j. \text{ jószágot } k.\text{-ra} \\ 0, \text{ ha az } i. \text{ szereplő nem cseréli el a nála lévő } j. \text{ jószágot } k.\text{-ra} \end{cases}$$

A szándékok kölcsönös egyezőségének, azaz a cserének a feltétele, hogy

$$\pi_i(j,k)\pi_l(k,j) = 1.$$

Meghatározható a maximumegyenlethez tartozó funkcionál vagy Bellman-féle egyenlet:

$$V_i(j) = \max\{-c_{ij} + \beta E[V_i(j'|j)]\} =$$
$$= -c_{ij} + \max \beta E[V_i(j'|j)]$$
$$V_i(i) = U_i - D_i + V_i(i^*) = u_i + V_i(i^*).$$

$V_i(j)$:[4] az *i.* szereplő közvetett haszna, ha a *j.* jószággal rendelkezik, azaz annak a hasznosságlehetőségnek a diszkontált értéke, amit ezzel a jószággal elérhet.

$E[V_i(j'|j)]$: annak a feltételes várható értéke, hogy a következő periódusban megszerzett j'-edik jószág mekkora közvetett hasznosságot eredményez, ha ebben a periódusban *j.* jószággal rendelkezik.

A fenti közvetett hasznossági függvény értelmezéséhez érdemes néhány megjegyzést tenni. A közvetett hasznosság valójában azt jelenti, hogy egy adott jószágnak a birtoklása mekkora haszonnal jár az adott fogyasztó számára. Mivel itt valószínűségekről van szó, vagyis nem biztosítható adott szereplő számára, hogy azzal találkozzon, akivel számára a csere a legelőnyösebb, így csak várható hasznosságról beszélhetünk. Ez a hasznosság persze két tényezőből adódik, egyrészt ha fogyaszthatja a jószágot, másrészt ha a birtoklása révén jó eséllyel szerezheti meg a fogyasztani kívánt jószágot.

Ugyanakkor érdemes felhívni a figyelmet egy igen sajátos dologra: a fenti modellben két hasznosságfüggvény van. Az $u_{ij}(t)$ átmeneti hasznosság, a hagyományos hasznossági függvényekkel rokon, *flow*-kat értékel, vagyis két állapot (jószág) közti átmenet hasznosságát. Míg a $V_i(j)$ közvetett hasznosság *stock*ot értékel, vagyis egy adott állapotot (jószágot). Természetesen a kétféle hasznosság nem egymástól függetlenül határozódik meg, ennek konkrét formájára a későbbiekben egy példa kapcsán visszatérünk.

Az egyensúly

Az állandósult állapot Nash-egyensúly a kereskedési stratégiáknak $\{\pi_i\}$ egy olyan halmaza, minden *i* típusra, együtt az állandósult állapot raktározási megoszlással (**p**), amely kielégíti, hogy

a) maximalizálás: minden típus maximalizálja a várható hasznosságát, a többiek adott stratégiája és adott **p** mellett,

b) racionális várakozás: adott $\{\pi_i\}$ mellett **p** adódik állandósult állapot raktározási megoszlásként.

Az optimális stratégiára fennáll, hogy

$$\pi_i(j,k) = 1 \Leftrightarrow V_{ik} > V_{ij},\ j \neq k.$$

Vagyis akkor hajlandó a nála lévő jószágot odaadni egy másikért, ha annak a birtoklása várhatóan nagyobb hasznosságot ígér neki. Ebből következően $\forall i$-re, $\pi_i(j,i) = 1$, vagyis bármi legyen is a szereplőnél, hajlandó odaadni az általa fogyasztani kívánt jószágért. Valamint nyilvánvalóan feltehető, hogy $\pi_i(j,j) = 0$, vagyis nem történik csere, ha ugyanazt ajánlják fel, mint amivel rendelkezik, illetve ha $\pi_i(j,k) = 1$, akkor $\pi_i(k,j) = 0$, azaz ha egyszer elcserél egy jószágot egy másikra, akkor azt nem hajlandó visszacserélni.

[4] Az egyszerűbb jelölés miatt legyen $V_i(j) = V_{ij}$.

Ezek után az egyensúlyi stratégia $\{\pi_i\}$ meghatározása nem más, mint a V_{ij} közvetett hasznosságok rangsorolásának meghatározása szereplőtípusonként. A szereplők a cserék során kétféle stratégia közül választhatnak.

1. Nevezzük *fundamentális stratégiá*nak, amikor a szereplők az alacsonyabb raktározási költségű jószágot választják az általuk fogyasztott jószágon kívül, amit természetesen minden mással szemben elfogadnak. Ez formálisan azt jelenti, hogy ha $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_J$, akkor $V_{ii} \geq V_{i1} \geq \ldots \geq V_{ii-1} \geq V_{ii+1} \geq \ldots \geq V_{iJ}$.

2. *Spekulatív stratégiának* nevezzük azt a stratégiát, amikor a szereplők hajlandók egy magasabb raktározási költségű jószágot is – nemcsak fogyasztási céllal – elfogadni, hanem mert piacképesebbnek ítélik meg.

Az A modell

A következőben a háromféle jószágot és háromféle szereplőt vizsgáló modellek közül nézzük meg részletesen egynek a működését. Ahhoz, hogy a gazdaság egyértelműen meghatározott legyen, a fentiekben említett egyszerűsítő feltételek mellett meg kell még határozni pontosan, hogy melyik szereplő mit termel. Legyen

$$-D_{\mathrm{I}}(j) = \begin{cases} -D_{\mathrm{I}}, & \text{ha } j=2 \\ -\infty, & \text{ha } j\neq 2, \end{cases}$$

$$-D_{\mathrm{II}}(j) = \begin{cases} -D_{\mathrm{II}}, & \text{ha } j=3 \\ -\infty, & \text{ha } j\neq 3, \end{cases}$$

$$-D_{\mathrm{III}}(j) = \begin{cases} -D_{\mathrm{III}}, & \text{ha } j=1 \\ -\infty, & \text{ha } j\neq 1, \end{cases}$$

vagyis az I. szereplő a 2. típusú, a II. szereplő a 3. típusú, míg a III. szereplő az 1. típusú jószágot termeli.[5]

Ezek után felírhatjuk a közvetett hasznosságokat a Bellman-egyenlet alapján, majd ellenőrizzük, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy $V_{12} > V_{13}$, $V_{21} > V_{23}$, $V_{31} > V_{32}$, vagyis hogy a szereplők fundamentális stratégiát játszanak. Mivel minden típusú szereplőből ugyanolyan arányban szerepel a gazdaságban, így 1/3 valószínűséggel találkoznak a különböző típusok egymással.

Tekintsünk egy I. szereplőt, akinél 2. típusú jószág van. Ha I. szereplővel találkozik (1/3 valószínűséggel), akkor nem történik csere: marad nála a 2. típusú jószág, aminek közvetett haszna: V_{12}. Ha II. szereplővel találkozik, annál p_{21} valószínűséggel van 1. típusú jószág, ez a szándékok kölcsönös egyezése miatt létrejövő csere. Vagyis az I. szereplő elfogyasztja a kapott 1. típusú jószágot, ami U_1 azonnali hasznosságot eredményez, majd termel egységnyi 2. típusú jószágot, aminek a közvetett hasznossága V_{12}. Ugyanakkor p_{23} valószínűséggel olyan II. szereplővel találkozik, akinél 3. jószág van, ekkor lehetősége van a cserére, mivel a II. szereplő mindenképpen elfogadná a nála lévő 2. típusú jószágot. Ha III. szereplővel találkozik, nem történik csere, mivel az nem fogad el 2. típusú jószágot, így a közvetett haszna V_{12} marad. A többi közvetett hasznosság is hasonló megfontolásokkal adódik.

$$V_{12} = -c_2 + \frac{\beta}{3}\{V_{12} + [p_{21}(u_1 + V_{12}) + p_{23}\max(V_{12}, V_{13})] + V_{12}\},$$

$$V_{13} = -c_3 + \frac{\beta}{3}\{V_{13} + V_{13} + [p_{31}(u_1 + V_{12}) + p_{32}\max(V_{12}, V_{13})]\}.$$

[5] A másik (*B* modell) háromszereplős modell esetén az I. szereplő a 3. típusú, a II. szereplő a 1. típusú, míg a III. szereplő az 2. típusú jószágot termeli. Ennek a modellnek az egyensúlyi jellemzői nagyban különböznek az általunk elemzett *A* modell tulajdonságaitól, ennek tárgyalása azonban a jelen tanulmánynak nem célja.

Megmutatható, hogy $V_{12} > V_{13} \Leftrightarrow c_3 - c_2 > \frac{\beta}{3}(p_{31} - p_{21})u_1$, vagyis bizonyos paraméterek mellett az I. szereplő spekulatív stratégiát játszik.[6]

A II. szereplőre felírva a közvetett hasznosságokat.

$$V_{21} = -c_1 + \frac{\beta}{3}\{[p_{12}(u_2 + V_{23}) + p_{12}\max(V_{21}, V_{23})] + V_{21} + [p_{31}V_{21} + p_{32}(u_2 + V_{23})]\}$$

$$V_{23} = -c_3 + \frac{\beta}{3}\{V_{23} + V_{23} + [p_{31}\max(V_{21}, V_{23}) + p_{32}(u_2 + V_{23})]\}.$$

Megmutatható, hogy tetszőleges paraméterek mellett fennáll, hogy $V_{21} > V_{23}$, vagyis a II. szereplő minden esetben fundamentális stratégiát játszik.

A III. szereplőre felírva a közvetett hasznosságokat:

$$V_{31} = -c_1 + \frac{\beta}{3}\{[p_{12}\max(V_{31}, V_{32}) + p_{31}(u_3 + V_{31})] + [p_{21}V_{31} + p_{23}(u_3 + V_{31})] + V_{31}\}$$

$$V_{32} = -c_2 + \frac{\beta}{3}\{[p_{12}V_{32} + p_{31}(u_3, V_{31})] + [p_{21}\max(V_{31} + V_{32}) + p_{23}(u_3 + V_{31})] + V_{31}\}.$$

Ugyancsak megmutatható, hogy tetszőleges paraméterek mellett fennáll: $V_{31} > V_{32}$, vagyis a III. szereplő is minden esetben fundamentális stratégiát játszik. Tehát az I. szereplő fundamentális stratégiájára a II. és a III. szereplő számára a legjobb válasz a fundamentális stratégia. Ugyanígy felírható némi módosítással a II. és a III. szereplő közvetett hasznossága, ha az I. szereplő spekulatív stratégiát játszik. Azonban mindkettőjük számára a legjobb válasz így is a fundamentális stratégia, vagyis az, hogy a döntésüket a cserékben csak a raktározási költségek, illetve a fogyasztási igényük határozza meg.

Felírható egy átmenetmátrix, ami azt mutatja meg, hogy adott típusú szereplő a találkozás után milyen jószággal lép a következő periódusba. A sorban az szerepel, akinek a találkozás utáni készletét vizsgáljuk, az oszlopban pedig az, akivel találkozik.

1. ábra

Átmenetmátrix fundamentális egyensúlyban

		I.		II.		III.	
		2.	3.	1.	3.	1.	2.
I.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.
	3.	3.	3.	3.	3.	2.	2.
II.	1.	3.	1.	1.	1.	1.	3.
	3.	3.	3.	3.	3.	1.	1.
III.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
	2.	2.	1.	1.	1.	2.	2.

[6] A fenti egyenletben természetesen p_{ij}-k nem paraméterek, hanem endogén módon határozódnak meg.

Az *1. ábrában* például a belső négyzet második sorának ötödik elemében a 2. azt jelenti, hogy I. szereplő, akinél 3. jószág van, találkozik III. szereplővel, akinél 1. jószág van, cserélnek, és az I. szereplőnél 2. jószág lesz, mivel elfogyasztja az 1. jószágot, majd termel egy 2. jószágot.

Ezen átmenetmátrix alapján meghatározható a javak egyensúlyi megoszlása: **p**, ami azt jelenti, hogy ha lezajlik egy csereperiódus, akkor a javak megoszlása ugyanaz, mint előtte volt, vagyis $\mathbf{p}(t-1)=\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}^*$. Ezek alapján felírható fundamentális egyensúlyra a következő hat egyenlet:

$$p_{12} = p_{12} + \frac{p_{13}}{3},$$

$$p_{13} = \frac{2p_{13}}{3},$$

$$p_{21} = p_{21}p_{13} + \frac{p_{21}}{3} + p_{21}p_{13} + p_{23}p_{31},$$

$$p_{23} = p_{21}p_{23} = p_{21}p_{23} + \frac{2p_{23}}{3},$$

$$p_{31} = p_{31} + p_{13}p_{32} + \frac{p_{32}}{3},$$

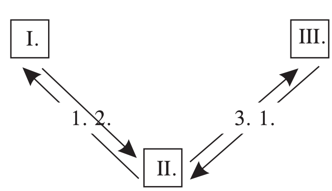
$$p_{32} = p_{32}p_{12} + \frac{p_{32}}{3}.$$

Ebből adódik egyensúlyban: $\mathbf{p}^*=(p_{12},p_{13},p_{21},p_{23},p_{31},p_{32})=\left(\frac{1}{3},0\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3},0\right)$. Vagyis az I. szereplőnél egy valószínűséggel 2. jószág van, míg a II. szereplőnél ½-½ valószínűséggel van 1., illetve 3. jószág, a III. szereplőnél pedig szintén egy valószínűséggel van 1. jószág.

Ez pedig, ha a szereplők közti áruáramlást ábrázoljuk, azt jelenti, hogy az 1. jószág, ami a legkisebb raktározási költségű, általános csereeszközként viselkedik a gazdaságban. Az általános csereeszköz nem más, mint egy olyan jószág, amit a cserékben nem a saját haszna, fogyaszthatósága miatt fogadnak el, hanem mert előbb vagy utóbb valami másra kívánják cserélni. (A *2. ábrán* szereplő nyilak a szereplők stratégiáit ábrázolják.)

2. ábra

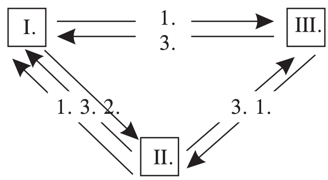
Cserék fundamentális egyensúlyban



Hasonlóan a fundamentális egyensúlyhoz, felírható a spekulatív egyensúlyhoz tartozó átmenetmátrix, illetve a javak egyensúlyi megoszlását meghatározó egyenletek. Spekula úv egyensúlyban $\mathbf{p}^*=(p_{12},p_{13},p_{21},p_{23},p_{31},p_{32})=\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2-\sqrt{2}}{6},\frac{2-\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}-1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

3. ábra

Cserék spekulatív egyensúlyban



Összegezve a fentieket, a gazdaságban kétféle tiszta egyensúly alakulhat ki.

1. *Fundamentális egyensúly* alakul ki, ha $c_3 - c_2 > \frac{\beta}{3}(p_{31} - p_{21})u_1 = \frac{\beta}{6}u_1$,[7] vagyis minden szereplőtípus fundamentális stratégiát játszik. Ekkor az 1. jószág játszik általános csereeszköz szerepet.

2. *Spekulatív egyensúly* alakul ki, ha $c_3 - c_2 < \frac{\beta}{3}(p_{31} - p_{21})u_1 = \frac{(\sqrt{2}-1)\beta}{6}u_1$, vagyis az I. szereplő spekulatív, míg a II. és III. szereplő fundamentális stratégiát játszik. Ekkor mind az *1.*, mind a *3.* jószág az általános csereeszközként működik.

Abban az esetben, ha $c_3 - c_2 \in \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\beta}{3}u_1, \frac{\beta}{6}u_1\right)$, a játéknak nincs a tiszta stratégiák közt egyensúlya, csak kevert egyensúly alakulhat ki. Ez annyit jelent, hogy azonos típusba tartozó szereplők különböző stratégiát játszanak.

A Kiyotaki–Wright-féle modellkörnyezet kiterjesztésére számos cikk született. A modell folytonos idejű változatát közli *Kiyotaki–Wright* [1991], amely a szereplőtípusok, illetve a javak számát végtelennek tekinti, valamint a szereplőkre vonatkozó sajátos egyensúly fogalmat vezet be. Az információs aszimmetriák megjelenítése igen fontos kérdés, vagyis hogy a szereplők nem ismerik fel a nekik felajánlott jószágot. Ennek az analitikus elemzése *Yiting* [1995]-ben található.

Sajátos módon nem volt folytatása annak az iránynak, amit *Kiyotaki–Wright* [1989] említ, vagyis egy nem fogyasztható, nem termelhető jószág gazdaságban kötött mennyiségben való szerepeltetésének.

Szimuláció[8]

A fentiekben bemutatott modelltípussal kapcsolatos vizsgálatok során igen fontos szerepet kaptak a szimulációs módszerek.[9] *Kiyotaki–Wright* [1989] modelljüknek csak a tiszta Nash-egyensúlyi stratégiáját határozták meg. Nem vizsgálták, hogy korlátozottan racionális, vagy információs hiányban miként valósítják meg a szereplők ezt az egyensúlyt. Számos tanulmány vizsgálta a fenti modellkörnyezetben a komputerszimulációs vagy kontrollált laboratóriumi kísérletek alkalmazásával a modell működését.

[7] Az eredmény az egyensúlyi megoszlások felhasználásával adódik.

[8] A következőkben ismertetett szimulációs eredményeket *Benedek Gábor* készítette.

[9] A kérdés egyre növekő jelentőségét jelzi, hogy Journal of Economic Dynamics & Control ez év márciusi számában egy szinopszist közöl az *agent-based computational economics* (ACE)-ról (*Tesfatsion* [2001]).

Az első szimulációs eredmények *Marimon és szerzőtársai* [1990]-től származnak, amelyben a szereplők a genetikus algoritmus segítségével változtatják viselkedésüket, így jutva el végül az egyensúlyi állapothoz.

Duffy [2001] azt a kérdést vizsgálja, hogy egy Kiyotaki–Wright-féle környezetben a mesterséges intelligencia, illetve a kontrollált laboratóriumi tesztek eredményei mennyiben hasonlítanak egymásra. Fontos eleme, hogy a spekulatív stratégia megtanítása a mesterséges szereplőknek igen hosszú időt vesz igénybe, sőt egyes paraméterbeállítások mellett annak ellenére sem konvergálnak az egyszerűbb tanulóalgoritmusok által irányított mesterséges ügynökök a spekulatív egyensúlyi állapothoz, hogy valójában az lenne számukra az optimális.

A fenti modellhez általunk készített szimulációs futtatásoknak az volt célja, hogy az analitikus úton kapott eredményeket teszteljük tovább: kiderítsük, hogy a rendszernek mennyi időre van szüksége az egyensúly kialakulásához, hogyan alakul a gazdasági szereplők helyzete az egyensúlyhoz vezető úton. Ugyanakkor a távlati cél, hogy olyan esetekben lehessen alkalmazni ezt a módszert, ahol az analitikus bizonyítások nehézkesek, így például paramétereknek a fentiekben említett tartományán, ahol a szereplők kevert stratégiát alkalmaznak.

A következő szimulációval azt kívántuk tesztelni, hogy a szereplők „rá tudnak-e jönni” az egyensúlyi stratégiájukra, egy egyszerű tanulási folyamatot feltételezve.

Stratégia reprezentáció

A szimuláció során meg kell jeleníteni a szereplők jellemzőit, ehhez első közelítésben 12 paramétert használtunk:

– a csere kilenc paramétere azt mutatja, hogy adott jószágot adott szereplő elcserél-e egy másik neki felajánlott jószágra. Azzal a feltételezéssel éltünk a futtatások során, hogy a szereplők tiszta stratégiát játszanak, vagyis egy adott jószágot egy másikra vagy mindig, vagy sohasem cserélnek el;

– a fogyasztói ízlést három paraméterrel való reprezentálásakor megengedhetjük, hogy egy szereplőtípus ne csak egy, hanem akár többféle jószágot legyen hajlandó fogyasztani;

– információs szempontból teljes információs játékot feltételeztünk, vagyis a szereplők felismerik a nekik cserére kínált jószágot.

Tipus	1.→1.	1.→2.	1.→3.	2.→1.	2.→2.	2.→3.	3.→1.	3.→2.	3.→3.	F1.	F2.	F3.
3.	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1

A fenti 12 elemű 0-ákból, 1–esekből álló vektor egy szereplőstratégia reprezentációját jelenti. A modell leírástól ez annyiban különbözik, hogy megengedjük, hogy a fogyasztás is döntési változó legyen. Vagyis a fogyasztónak ki kell próbálnia, hogy melyik jószág ízlik neki, és utána csak azt fogyasztja.

A javak fogyasztásából, termeléséből, illetve raktározásából eredő hasznokat természetesen nem paraméterként, hanem exogén állandóként szerepeltettük. A cél ugyanis az, hogy a szereplők megtanulják az optimális stratégiájukat. Ehhez azonban tanulási struktúrákat kellett meghatározni.

Tanulás

Meg szeretnénk vizsgálni, hogy a szereplők, meg tudják-e valósítani egyensúlyi stratégiájukat egy ismételt játék keretében. Az analitikus eredményekből tudjuk ugyan, hogy bizonyos paraméterkombinációk mellett milyen egyensúly alakul ki, de azt nem, hogy ez miként jön létre.

A legegyszerűbb eset a *teljes leszámlálás*, azaz a szereplők a stratégiák minden lehetséges kombinációját megkísérlik megvalósítani. Miután minden kombináció szerepel, ezért szerepelnie kell az egyensúlyi megoldásnak is. Ezzel a módszerrel választ kapunk arra a kérdésre, hogyan lehet meghatározni az egyensúlyi megoldást numerikus módszerekkel, de nem kapunk választ arra, hogyan jutnak el a szereplők ehhez az állapothoz, ha egyáltalán eljutnak. Nem is beszélve arról, hogy a teljes leszámlálás rendkívül „költséges” algoritmus, azaz túl hosszú időt vesz igénybe felesleges kombinációk értékelésével.

A második magatartásforma a *fiktív lejátszás*. Ebben a módszerben a soron következő ügyfél úgy határozza meg a legmegfelelőbb stratégiáját, mintha minden más szereplő ugyanúgy viselkednie, mint az előző periódusban. Ez a módszer sok játékelméleti probléma esetén vezet egyensúlyi megoldáshoz, sajnos azonban sok esetben határciklus alakulhat ki és sohasem kerülünk el az egyensúlyi pontba. Kedvező esetben is jellemző, hogy a konvergencia sebessége igen lassú, mivel a játékosok szisztematikusan követhetik el ugyanazokat a tévedéseket.

Amikor a fenti módszerek nem alkalmazhatók hatékonyan, valamilyen heurisztikus eljárást kell találni. Ezekről nem tudjuk biztosan, hogy valóban optimális megoldást adnak, hiszen legtöbb esetben ez nem bizonyítható. E hiányosságot pótolja a számítási idő lerövidítése. A heurisztikus algoritmusok egyik nagy csoportját képezik az evolúciós algoritmusok.

Igen bonyolult eljárás az, amikor olyan magatartásformával próbálkozunk, ahol a szereplők fejlődhetnek. Ebben az esetben a szereplőket nem mint elkülönült személyeket, hanem mint egy populáció egyedeit kell kezelni, és ezért azonos típusú szereplőből többet is kell szerepeltetni. A lejátszás során a sikeres szereplők kiválasztódnak és „szaporodnak”, tovább fejlődnek, a sikertelenek „elpusztulnak”. Az eljárást *genetikus algoritmus* segítségével programozzuk.

Végezetül az utolsó magatartásforma az, amikor a szereplő képes tanulni. Ezt a *neurális háló* segítségével valósítjuk meg.[10] A szimuláció során a szereplők fokozatosan tanulják meg, hogy mely magatartásforma a leghatékonyabb számukra. E módszer nemcsak az egyensúlyi megoldás hatékony megtalálására, de az odáig vezető út megtalálásának vizsgálatára is igen alkalmas lehet.

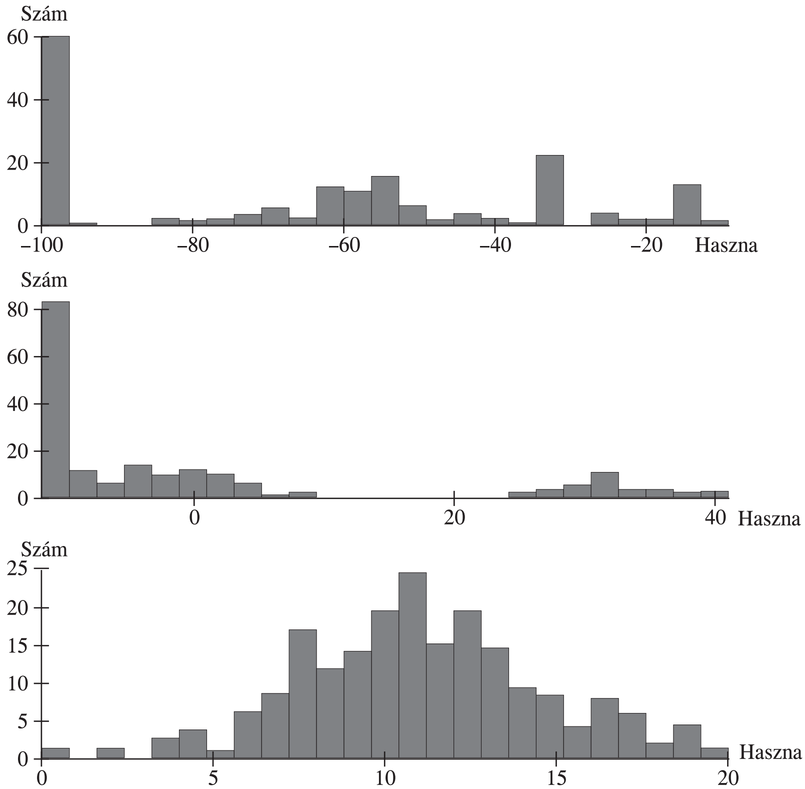
A fentiek közül egy olyan evolúciós algoritmust alkalmaztunk, amely leginkább a neurális hálózathoz hasonlít. A különbség annyi, hogy a tanulás diszkrét értékenként, egy döntési fa mentén történik. Induljunk ki 0–1-ekkel véletlenszerűen feltöltött stratégiareprezentációkból, típusonként 200 szereplőből, majd működtessük a gazdaságot 1000 perióduson keresztül. Ezután értékelhetjük, hogy az adott típusú szereplők mekkora hasznosságra tettek szert. A *4. ábrában* szereplő első hisztogram azt mutatja, hogy a szereplők kivétel nélkül negatív hasznosságot értek el a véletlenszerű stratégiájukkal. Válasszuk ki azokat, akik a legmagasabb hasznosságot érték el, és nézzük meg, milyen stratégiát követtek! Azokat a stratégiákat találjuk az *1. táblázat* első részében, amelyek az első futás után relevánsnak bizonyultak. Így például azonnal elfogadható, hogy a szereplők a típusuknak megfelelő jószágot fogyasszák el, illetve, hogy az I. szereplő, ha van egy 2. jószága, akkor cserélje el 1. jószágra, illetve, hogy a II. szereplő, ha van egy 1. jószága, akkor ne cserélje el 3. jószágra.

A következő futásban már ezeket a stratégiákat fixen megkötjük, és a szereplők csak a megmaradó helyeken viselkednek véletlenszerűen. Ennek az eredményét mutatja a *4. ábra* második hisztogramja.

[10] Az evolúciós algoritmusokról lásd *Benedek* [2000–2001].

4. ábra

Az adott típusú szereplők hasznossága



1. táblázat

Az adott típusú szereplők stratégiája

Típus	1.	2.	3.
Csere	2.$\to$1.	3.$\to$1. 1.$\not\to$3.	1.$\to$3.
Fogyasztás	1. ✓	2. ✓ 1.x	3. ✓
Típus	**1.**	**2.**	**3.**
Csere	2.$\to$1. 2.$\not\to$3.	3.$\to$1. 1.$\not\to$3. 1.$\to$2. 3.$\to$2.	1.$\to$3. 1.$\not\to$2.
Fogyasztás	1. ✓	2. ✓ 1.x	3. ✓

Magyarázat: $\to$: csere, $\not\to$: nincs csere, ✓: fogyasztás, x: nincs fogyasztás.

Láthatóan egy jelentős csoport pozitív hasznossággal rendelkezik, most ezeknek a szereplőknek vizsgáljuk meg a stratégiáját és választjuk ki az eredményeseket! A harmadik futás után azt tapasztaltuk, hogy minden olyan stratégiát megtaláltunk, amit az analitikus eredmények előre jeleztek.

Hivatkozások

BENEDEK GÁBOR [2000–2001]: Evolúciós alkalmazások előrejelzési modellekben. I–II. Közgazdasági Szemle, 12. sz. és 1. sz.

CLOWER, R. W. [1967]: A reconsideration of microfoundations of monetary theory. Western Economic Journal, 6. sz.

DUFFY, J. [2001]: Learning to speculate: Experiments with artificial and real agents Journal of Economic Dynamics and Control, 25.

HAHN, F. H. [1965]: On Some Problems of Providing the Existence of an Equilibrium in a Monetary Economy. Megjelent: *Clower, R. W.* (szerk.): Monetary Theory. Penguin Modern Economics Readings, 1970. Penguin, Harmondsworth.

HICKS, J. R. [1935]: A suggestion for simplifying the theory of money. Economica, 2.

JEVONS, W. S. [1875]: Money and the Mechanism of Exchange. Appleton, London.

KIYOTAKI, N.–WRIGHT, R. [1989]: Money as a medium of exchange. Journal of Political Economy, 97.

KIYOTAKI, N.–WRIGHT, R. [1991]: A contribution to the pure theory of money. Journal of Economic Theory, 53.

MARIMON, R.–MCGRATTAN, E.–SARGENT, T. [1990]: Money as a medium of exchange in an economy with artificially intelligent agents. Journal of Economic Dynamics and Control, 14.

MARX, K. [1867]: A tőke – I. A politikai gazdaságtan bírálata, I. Áru és pénz. Kossuth Kiadó, Budapest, 1962.

OSTROY, J.–STARR, R. [1974]: Money and the decentralization of exchange. Econometrica, 42.

PATINKIN, D. [1965]: Money interest and price. Harper and Row, New York.

TESFATSION, L. [2001]: Introduction to the special issue on agent-based computational economics. Journal of Economic Dynamics and Control, 25.

TOBIN, J. [1991]: Money. Szócikk, lásd: New Palgrave Dictionary of Finance, London.

WEBER, M. [1922]: Gazdaság és társadalom – I. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1987.

YITING, L. [1995]: Commodity money under private information. Journal of Monetary Economics, 36.