

## KÓBOR ÁDÁM

### A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockázatot érték számításában

---

A piaci kockázatomérés fontosságának a ténye, a nemzetközi szinten elterjedt módszerek meglehetősen gyorsan beépültek a hazai pénzügyi szakma gondolkodásába. Napjaink legnépszerűbb elemzési rendszerét a *kockázatot érték* (*Value at Risk–VaR*) számításához kapcsolódó módszerek jelentik. A kereskedési könyvi szabályozás hatályba lépésével a VaR-számítás és a hozzá kapcsolódó ismeretek elterjedése még ütemesebbé válhat. Ugyancsak közismert az a tény, hogy a legtöbb pénzügyi hozam-idősor nem felel meg a normalitás szigorú követelményének; a piaci hozamok eloszlásai „vastag szélekkel” jellemezhetők. Jelen tanulmánynak a célja, hogy áttekintsen és bemutasson az alkalmazás illusztrálásával olyan módszereket, amelyek könnyen implementálhatók, azonban a VaR-bebecslések hatékonyságát mégis nagyban növelhetik. Végül a tanulmány a különböző eljárásokat hatékonyságuk szerint hasonlítja össze; ehhez tőzsdeindexekre (BUX és DJIA) végzett VaR-bebecslések szolgálnak segítségül. Az összehasonlításokból természetesen csak úgy lehet általánosabb következtetéseket leszűrni, hogy szem előtt tarjuk a választott termékek és időszak konkrétságát és egyediségét.

---

A tanulmányban áttekintjük és összehasonlítjuk a parametrikus VaR-számítás során használt különböző, viszonylag elterjedtebb eljárásokat, amelyek a piaci faktorok eloszlásának megfigyelt és jövőbeli potenciális *terjedelmét* próbálják meghatározni. A piaci tényezők kockázatoságának mértékét jellemezzük ezzel a terjedelemmel, amelyet a gyakorlati életben leggyakrabban a *volatilitással* jellemezhetünk. Noha a tanulmány számos módszertani kérdést tárgyal, elsősorban azon közgazdászok érdeklődésére tart számot, akik kockázatkezeléssel foglalkoznak. A VaR-modellek alkalmazóinak tisztában kell lenniük az általuk használt modellek sajátosságaival és korlátaival; a modellek *pontosága* és számításigényessége közötti átváltással.

A *kockázatot érték* számítása során két alapvető kérdéskörre kell választ találnia az elemzőnek: egyfelől milyen sajátosságokkal bír az elemzésre szánt portfólió, és milyen elemi piaci pozíciókra lehet azt felbontani (*mapping*), másfelől a portfólió értékváltozásait befolyásoló piaci faktorok viselkedését miként lehet a legjobban megismerni és megragadni. A tanulmány a másodikként említett kérdéskörrel foglalkozik.

Ha a piaci folyamatok megfelelnek a „normalitásnak”, a VaR-bebecslés módszertanilag könnyű (legalábbis a becslés azon része, amelyet az adott valószínűség mellett várható legnagyobb piaci faktorváltozás meghatározása jelenti). Közismert tény ugyanakkor, hogy ha egy megfigyelt hozamidősor hisztogramjára tekintünk, a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez képest *leptokurtikus*, „vastag szélű” és csúcsos alakzatot találunk. A koc-

---

A PhD hallgató cikkének megjelenését a Közgazdasági Szemlelben a Magyar Vállalatgazdasági Kutatószervezet Alapítvány támogatta.

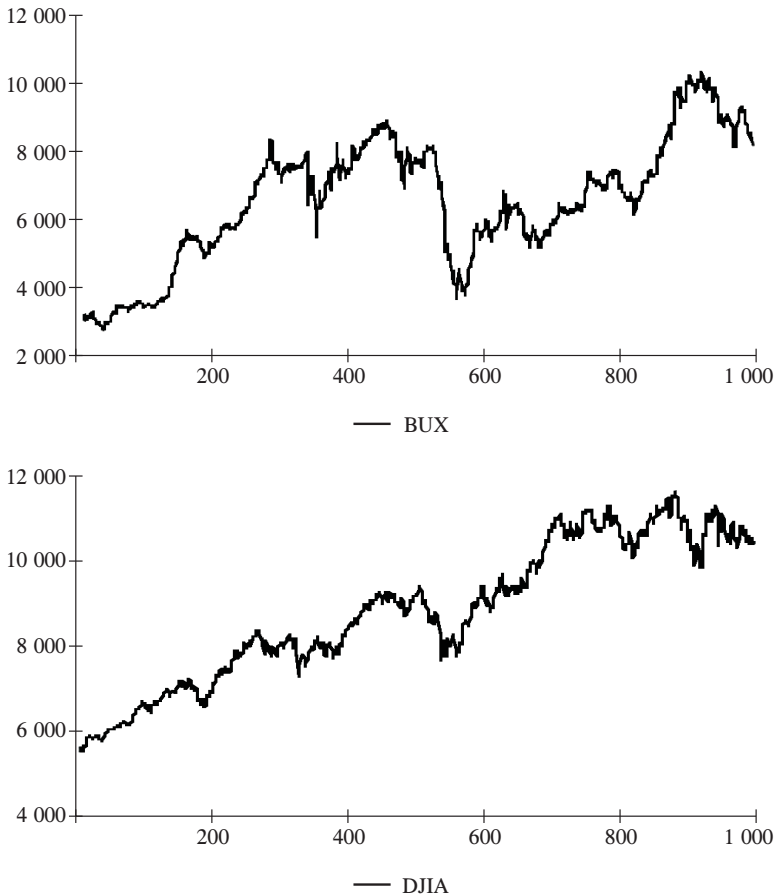
Kóbor Ádám a Magyar Nemzeti Bank munkatársa és a BKÁE PhD hallgatója.

kázatkezelés e problémájának a kezelésére több módszer is született, a cikkben az alkalmazási lehetőségeket tekintjük át, külön figyelve a magyarországi jellemzőkre.

Az illusztrációk tárgyául is a lehető legegyszerűbb „portfóliót”, a piaci indexet választottam. A módszertani tárgyalásban két ilyen index, a prompt *BUX*-index és a *Dow Jones Industrial Average (DJIA)* index 1001 napos, közel négyéves adatsora (1996. június 25.–2000. június 30., illetve 1996. július 16.–2000. június 30.) alapján mutatom be a különböző parametrikus VAR-becslési eljárásokat.<sup>1</sup> A két idősor négyéves alakulását mutatja az 1. ábra.

1. ábra

A BUX- és a DJIA-index négyéves időszora



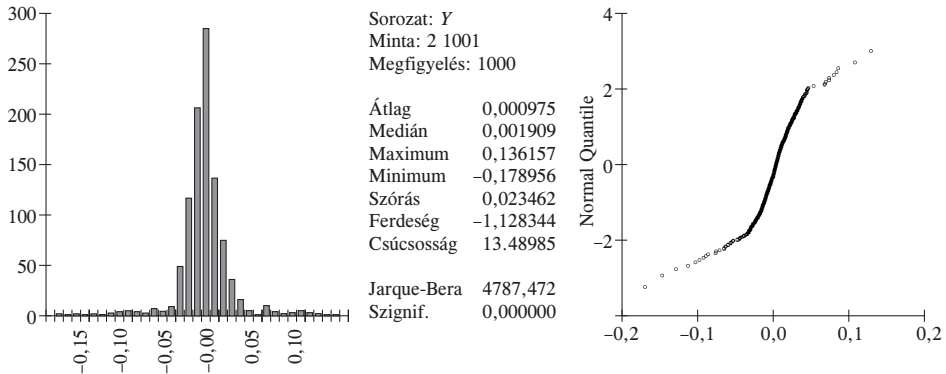
A két index  $y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$  képlettel (ahol az  $y$  jelöli a folytonos hozamot, az  $S_t$  a  $t$  napi indexértéket) számított napi folytonos hozamainak hisztogramjait és legfontosabb

<sup>1</sup> A VAR-számításhoz alkalmazott modellek paramétereinek a becsléséhez 500 napos hozamidősorokat vettem alapul, így az első VaR-értékeket a hozamidősorok 501. napjára számítottam ki. Ezt követően minden napra (tehát eljárásonként mind az 500 VaR-becslésre) a modellparamétereket újrabecsltem, így használtam fel indexenként mind az ezer hozamértéket. A tanulmányban bemutatott ábrák és becslült paraméterek az utolsó 500 adaton alapuló becslések eredményei, tehát a 2000. június 30-án „érvényes” állapotot tükrözik.

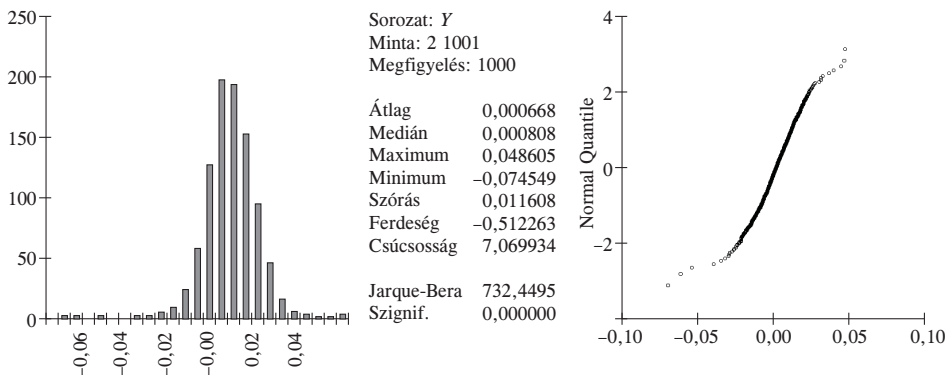
statisztikáit mutatja a 2. ábra. A normalitás tesztelésre a parametrikus *Jarque–Bera teszt*,<sup>2</sup> illetve az ugyancsak  $\chi^2$ -eloszláson alapuló illeszkedésvizsgálatot alkalmaztam.<sup>3</sup>

A hisztogramok mellett közölt számítások alapján látható, hogy a normalitás nullhipotézise a *Jarque–Bera*-teszt alapján elvetésre kerül bármilyen szignifikanciaszinten. Az *illeszkedésvizsgálat* ugyancsak elvetette a normalitás nullhipotézisét mindkét index esetében.<sup>4</sup> A formális tesztelési eljárások mellett vizuális támpontot jelentenek a hisztogramok mellett látható *quantile-quantile plot*ok is, amelyek ugyancsak azt mutat-

2. ábra  
A BUX-hozamok eloszlása



b) DJIA hozamok eloszlása



<sup>2</sup> Normalitás Jarque–Bera tesztje:

$$JB = \frac{N-k}{6} \left[ S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2 \right] \sim \chi^2(2)$$

$S$ : Ferdeség,  $K$ : csúcsosság,  $k$ : becsült paraméterek,  $N$ : mintaelemszám (jelen esetben  $k=2$ ).

<sup>3</sup> Illeszkedésvizsgálat során egy véletlen változó tapasztalati eloszlását vetjük össze egy, a nullhipotézisben megfogalmazott eloszlással. A  $K$  statisztika  $(r-k-1)$  szabadságfokú  $\chi^2$ -eloszlást követ, ahol:

$$K = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \text{ és } r \text{ jelenti a vizsgált változó eloszlása elemzésekor meghatározott osztályközök szá-$$

mát, a  $v_i$  az  $i$ . osztályközbe kerülés számát, a  $p_i$  az  $i$ . osztályközbe kerülés valószínűségét az „elméleti” valószínűségeloszlás szerint, valamint  $n$  a mintaelemszámot. A teszt leírásáról részletesen lásd például Mills [1993].

<sup>4</sup> A teljes idősor hozameloszlását vizsgálva, a normális eloszlással szemben,  $n = 1000$ ,  $r = 37$  mellett a BUX esetében a  $K$ -statisztika értéke  $1,01 \times 10^8$ ; a DJIA esetén  $6,63 \times 10^6$  volt.

ják, hogy az együttes eloszlások nem teljesítik a normalitást. (A *quantile-quantile plot* egy vizsgált változó tapasztalati eloszlását hasonlítja össze egy elméleti eloszlásfüggvény alakjával, jelen esetben a standard normális eloszlásával. Ha a tapasztalati eloszlás normális lenne, a grafikonon egy átlós egyenes szakaszt kellene látnunk, ami azt jelentené, hogy a vizsgált és a kontrollváltozó kvantilisei azonos ütemben jelentkeznek. A grafikonok  $S$  alakjának alsó és felső része a vastag széleket, a középső meredekebb szakasz a csúcosságot tükrözi.)

### A kockázatotott érték (VaR) rövid definíciója

A VaR úgy definiálható, mint az a pénzösszegben vagy hozamkategóriában kifejezett érték, amelynél a portfólió egy előre meghatározott valószínűségi szinten és egy előre meghatározott időtávon várhatóan nem szenved el nagyobb veszteséget. A definíció formálisan is megfogalmazható.<sup>5</sup> Általánosan a VaR-érték:  $-W_0(r^* - \mu)$  (átlagos hozamhoz képesti relatív veszteség) vagy  $-W_0r^*$  (abszolút veszteség), ha  $W_0$  a vizsgált portfólió értéke,  $\mu$  az adott időszakra számított várható hozam,  $r^*$  pedig a jövőbeli hozamok adott valószínűségi szintnek megfelelő kvantilise. (Például 95 százalékos megbízhatósági szinten, 100 lehetséges hozam esetén az 5. legrosszabb.) Az  $r^*$  *becslése* történhet a hozamok múltbeli vagy szimulált eloszlásából tapasztalati úton vagy pedig valamilyen parametrikusan leírható eloszlás feltételezése mellett formális módon; a későbbiekben ezekről az eljárásokról lesz részletesebben szó.

A definíció módszertanilag tágabban is megfogalmazható: ha a pénzügyi termék  $W$  értéke  $f$  faktortól függ, és a  $W$  érték érzékenysége  $f$ -re a  $\Delta$  érzékenységi paraméterrel fejezhető ki, akkor  $VaR = -W\Delta df^*$ , ahol  $df^*$  a jövőbeli faktorváltozások eloszlásának adott valószínűségi szint melletti kvantilisét jelenti. A *delta* ( $\Delta$ ) értéke a részvényindexek esetében önmagukra nézve 1; de a részvények esetében az indexet alapfaktornak tekintve, a *béta*-együttható felel meg a *deltának* (a *béta* fejezi ki, hogy 1 százalékos indexváltozás mellett *várhatóan* mekkora lesz az adott időszaki részvényhozam). A kötvények esetében a hozamgörbét tekintve kockázati faktornak, a *duration* jelenti a deltát (ami gyakorlatilag a kötvények jelenértékének a kötvényhozam szerinti deriváltja), míg opciók esetében valóban a klasszikus „delta” mutatószámra kell gondolnunk. Az ilyen, érzékenységi paraméter segítségével végzett elemzést hívják „delta-értékelésnek”. A továbbiakban – mivel részvényindexeket vizsgálunk – a delta említésétől eltekintünk, azt mindig 1 értékűnek tekintjük. A definíció általánosabban:

$$c = \int_{w^*}^{\infty} f(w) dw$$

$$1 - c = \int_{-\infty}^{w^*} f(w) dw = P(w \leq W^*) = p,$$

ahol  $f(W)$  a jövőbeli portfólióérték-változás eloszlásának sűrűségfüggvénye,  $c$  pedig a konfidenciaszint. A  $p$  valószínűség mellett következhet csak be várhatóan a  $W^*$ -nál (a VaR-értéknél) nagyobb értékvesztés.

A VaR becslési eljárások három fő módszercsaládba sorolhatók: a „variancia-kovariancia” (vagy parametrikus eloszlást alkalmazó) módszerek, a historikus szimulációk és a Monte-Carlo-szimulációk csoportjába. Ebben a tanulmányban alapvetően az első cso-

<sup>5</sup> Lásd például *Jorion* [1999], illetve *Duffie-Pan* [1997].

portra koncentrálunk, ugyanakkor meg kell említenünk, hogy a nem normalitást a másik két családdal is lehet hatékonyan kezelni. (A Monte-Carlo-szimulációkhoz ugyanakkor az itt leírt módszerek részben jó segédeszközként használhatók; például a véletlenszámgenerálások parametrizálásához.) A hozamok parametrikus eloszlására másként is felírható a definíció. Bevezetesként éljünk a legegyszerűbben kezelhető esettel: feltételezzük, hogy a hozamok  $\mu$  várható értékű és  $\sigma$  szórású *normális* eloszlást követnek. Ebben az esetben a VaR felírható a következők szerint:

$$\begin{aligned} r^* &= N^{-1}(p)\sigma_T\sqrt{\Delta t} + \mu \\ W_0(r^* - \mu) &= W_0N^{-1}(p)\sigma_T\sqrt{\Delta t} \\ W_0r^* &= W_0[N^{-1}(p)\sigma_T\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t], \end{aligned}$$

ahol  $\sigma$  a hozamokból számított szórás,<sup>6</sup>  $\sigma_T$  pedig a jelen  $T$  időponttól  $\Delta t$  időtávra becsült, éves szinten kifejezett volatilitás.  $N^{-1}(p)$  jelöli a standard normális eloszlás meghatározott  $p$  valószínűségi szint melletti egyoldalú tartományát. Ezeket a képleteket alkalmazták talán a leggyakrabban, ugyanakkor a normalitás feltételezése mellett egy másik feltételnek is teljesülnie kell: az idő négyzetgyökével való szorzás valójában akkor állja csak meg a helyét, ha hozamok időben egymástól függetlenek.<sup>7</sup>

Fontos, hogy VaR-modellünket tesztelni tudjuk, és megállapítsuk annak megbízhatóságát. Kérdés, hogy ha például 99 százalékos megbízhatósággal jeleztünk VaR-értékeket, akkor például 100 nap alatt két „tévedés” jelenti-e azt, hogy a modellünk hibás. A modellek megbízhatóságának tesztelésére a *Kupiec-féle*<sup>8</sup> valószínűségi hányados módszer (*likelihood ratio-LR*) alkalmazható. Vizsgáljuk modellünk működését  $T$  napon keresztül! Azt tapasztaljuk, hogy ebből  $N$  alkalommal szenvedett el portfóliónk a jelzett VaR-értéknél nagyobb veszteséget. Amennyiben VaR-számításainkat  $c = 1 - p$  konfidenciaszinten végezzük, megfogalmazható a  $H_0: N/T = p$  és  $H_1: N/T \neq p$  hipotézis,  $N$  binomiális eloszlását feltételezve. Ekkor az *LR* próbastatisztika:

$$LR = 2 \left\{ \ln \left[ \left( \frac{N}{T} \right)^N \left( 1 - \frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] - \ln [p^N (1-p)^{T-N}] \right\} \sim \chi_1^2.$$

### Stabil és feltételes normalitás

A pénzügyi modellek általános feltevése, hogy a piaci hozamok normális eloszlást követnek. A tapasztalati tények ugyanakkor a megfigyelések túlnyomó többségében azt jelzik, hogy egy megfigyelt hozamidősor elemei nem teljesítik a normalitást, a valószínűségeloszlásaik a normális eloszlás kereteit meghaladó, szélsőséges eseményeket is mutatnak (leptokurtikusság, vastag szélek jelensége).

Nem mindegy azonban, hogy a normalitásról mint a megfigyelési időponttól független (feltétel nélküli, *unconditional*) vagy pedig attól függő (*conditional*) jelenségről beszél-

<sup>6</sup> Volatilitás névvel illetik a szórást, ha folytonos hozamokból évesítve közlik.

<sup>7</sup> A DJIA napi hozamai megnyugtató megbízhatósággal elfogadhatók függetlennek. A BUX esetében már nagyobb autokorreláltság mutatkozik, de még itt sem vétünk számottevő hibát, ha elfogadjuk a függetlenség hipotézisét.

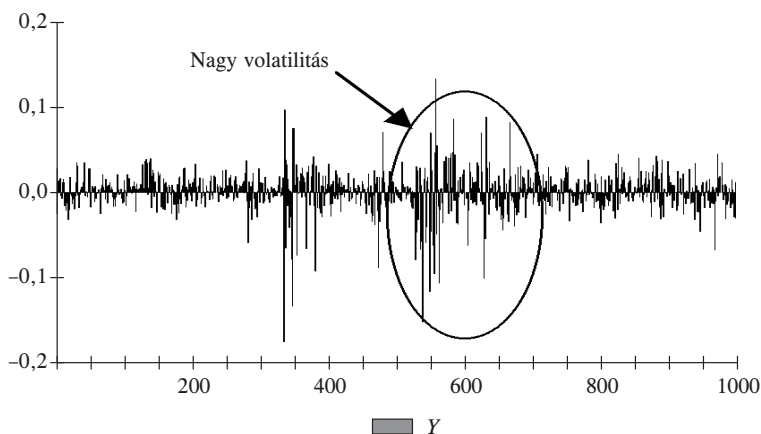
<sup>8</sup> Lásd *Kupiec* [1995]. A próbának megfelelően például 500 megfigyelésből 5 százalékos hibahatárral a 95 százalékos VAR-becslés 17–35 hibával (azaz a VAR-t meghaladó veszteséggel), a 99 százalékos VAR 2–9 hibával, a 99,5 százalékos VAR pedig legfeljebb 6 hibával fogadható el. Ugyanakkor a  $T$  növelése szűkíti az elfogadható hibaarányok határait!

lünk. Attól, hogy a megfigyelések *együttes* eloszlása nem teljesíti a normalitást, elképzelhető (és vizsgálandó), hogy a megfigyelt hozamok különböző megfigyelési időszakokban beleillenek-e a normalitás kereteibe. Vizsgálatukat és összehasonlításukat a megfigyeléseket *standardizálva* kell elvégezni. Míg a vizsgálatot a feltétel nélküli normalitás esetében (zéró várható érték feltételezése mellett) a standardizált  $r_t/\sigma$  alakban kifejezett változókra kell elvégezni, a feltételes esetben ez a  $r_t/\sigma_t$  alakra módosul, feltételezve és megengedve, hogy heteroszkedasztikus piaci folyamatról legyen szó (lásd például *J. P. Morgan* [1996]). Ekkor minden megfigyelést a „hozzá tartozó” szórással kell standardizálni. Míg tehát az időponttól független (*unconditional*) eloszlás alakja nem függ az időponttól és a variancia állandó, a feltételes eloszlás (*conditional*) esetében az együttes eloszlás függ az időponttól, a variancia sztochasztikus, és a folyamatot a heteroszkedaszticitás jellemzi.

A kockázat parametrikus előrejelzésének módszereit így két kérdéskör mentén vizsgáljuk.

1. Állandónak tekinthetjük-e a volatilitást, vagy elfogadjuk a volatilitások klaszterezett viselkedését (azaz feltételességét)? Az első esetben tudomásul vesszük, hogy vannak kisebb és nagyobb nyereségek és veszteségek, ám ezek mértékének alakulását teljesen véletlenszerűnek tartjuk. Az a *3. ábra* a BUX napi hozamait mutatja. Látható, hogy nagy abszolút értékű árfolyamváltozásokat valószínűleg ismét nagy abszolút értékű árfolyamváltozások fogják követni, míg a nyugodtabb időszakokban bár ugyancsak függetlenek a hozamok, de nem kell drasztikus mértékű árfolyamváltozásra számítanunk.

3. ábra  
A BUX napi hozamai



2. Elemzésünket a normalitás keretein belül kívánjuk-e folytatni, vagy valamilyen más eloszlást keresünk? A normáloszlás alkalmazásakor tisztában kell lennünk azzal a ténnyel, hogy viszonylag gyors az eloszlás széleinek a lecsengése,<sup>9</sup> így a *vastag szélek* problémáját – azaz a többszörös szórásstartományon kívüli „szélsőséges” eseményeket – nem tudjuk elemezni. Rendkívüli előnye azonban – és ez a mindennapi alkalmazás szempontjából nem mellékes –, hogy rendkívül könnyen és kényelmesen használható, hiszen mindössze a várható értéket és a szórás paramétert kell meghatározni.

<sup>9</sup> Annak a valószínűsége, hogy egy véletlen változó az átlag +/-3-szoros szórásstartományban helyezkedik el: 99,7 százalék.

További vizsgálataink dimenzióit az 1. táblázat mutatja.

1. táblázat

Alapeloszlás	Piaci hozamok eloszlása	
	időponttól független	feltételes
Normális	Stabil variancia	GARCH, EWMA*
Alternatív eloszlás	Student-féle $t$ -eloszlás véges varianciával, normál kevert modellek	GARCH $t$ -eloszlású standardizált hibatagokkal

\* GARCH általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*).

EWMA: exponenciális súlyozású mozgó átlagolás (*Equivalently Weighted Moving Average*).

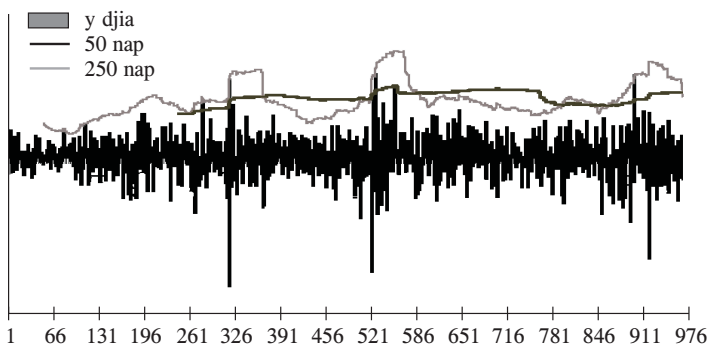
A piacon megfigyelhető vastag szélek jelenségét az *időtől független normális* eloszláson kívül az összes többi modell produkálja, így elemzési lehetőségeink széles körűek. Ugyanakkor meg kell vizsgálni az egyes modellek alkalmazhatóságának feltételeit és korlátait is.

### Időfüggetlen eloszlás és normalitás

Számos pénzügyi modell (így például a Black–Scholes-modell is) feltételezi a volatilitás állandóságát, azaz *homoszkedaszticitását*. A legegyszerűbb volatilitásmeghatározás a megfigyelt hozamokból számított standard szórás kiszámítása (illetve évesítése az idő négyzetgyökével történő szorzással). Ebben az esetben a kiválasztott időszakban minden megfigyelést azonos súllyal vesznek figyelembe (a variancia a várható értéktől való négyzetes eltérések mozgó átlaga). Amikor egy sokkhatás bekerül a megfigyelésbe, ugyanolyan „pofont” ad a volatilitásnak, mint amekkorát csillapít rajta a megfigyelési ablakból történő kikerülésével. Persze időben előrehaladva, a számított volatilitásérték nem marad állandó; a megfigyelési ablak nagyságától függően ingadozik. A 4. ábra 50 és 250 napos megfigyelési ablakkal számított volatilitásokat mutat, mellette feltüntetve a napi hozamok nagyságát is. Látható, hogy minél hosszabb a visszatekintési periódus, annál „lomhább” a számított volatilitás reakciója is.

4. ábra

A volatilitás alakulása a megfigyelési ablaktól függően



Egy átváltásra jutunk végül: ha hosszú időszakot választunk, sok információt tudunk figyelembe venni, ugyanakkor a számított volatilitásunk nem képes gyorsan reagálni az esetleg hirtelen változó piaci viszonyokhoz. Másrészt viszont, ha rövid időszakot választunk, a számított volatilitás gyorsan reagál, ugyanakkor a régebbi események teljesen figyelmen kívül maradnak.

A portfólió abszolút VaR-értékét a  $W_t N^{-1}(p) \sigma_T$  vagy a  $W_t \{\exp[N^{-1}(p) \sigma_T] - 1\}$  képletel határozhatjuk meg a hozamszámítás módszerének megfelelően. A  $W_t$  a portfólió jelenlegi piaci értékét jelenti, a  $\sigma_T$  pedig az időtávnak megfelelő volatilitásra adott becslés (jelen egyszerűsített felírásban ezúttal nem évesítve, hanem valóban például 1 vagy 10 napra számítva). A BUX és a DJIA napi hozamaiból számított (mind az 1000 napot figyelembe vevő) napi volatilitásértékek a 2. ábrán bemutatott hozamhisztogramokon olvashatók. Persze ezeket az értékeket lehet, hogy *mai* szemmel nem tartanánk reálisnak, és az 1000 napos megfigyelési periódust hosszúnak tartjuk, viszont azt sem könnyű megmondani, hogy valójában mekkora megfigyelési periódust tartunk „elfogadhatónak” az egyszerű szórásnégyzet alkalmazása során.

### Feltételes normalitás

A már eddig ábrázolt grafikonok is azt mutatják, hogy aligha beszélhetünk állandó volatilitásról; figyelembe kellene vennünk a piaci idősorok sajátos heteroszkedaszticitását. Olyan módszer szükséges, ami figyelembe veszi a volatilitás klasztereződését: a közelmúlt eseményeinek nagyobb súlyt ad, ugyanakkor nem veszít el minden információt a távoli múltból sem. A volatilitás ilyen modellezésére az exponenciális súlyozású mozgó átlagolást (EWMA) és a GARCH-módszereket (általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás) alkalmazzák. A GARCH-módszerek bevezetése *Engle* (ARCH; 1982) és *Bollerslev* (GARCH; 1986) nevéhez fűződik.<sup>10</sup> A későbbiekben láthatjuk, hogy az EWMA a GARCH(1,1) modell egy speciális változata.

### GARCH-modellek

A modell készítésekor megfigyelt hozamainkat két komponensre bonthatjuk:  $r_{t+1} = \mu + \eta_{t+1}$ , ahol  $\mu$  a hozamok várható értéke (a gyakorlati életben, napi szinten tekinthető zérónak), valamint a  $\eta$  jelenti az „innovációt” (praktikusan: az átlagtól való eltérést). A modell az innovációk varianciáját kívánja kezelni (ami gyakorlatilag 0 várható érték mellett a hozamok varianciája is egyben). A feltételes variancia az ARCH-modell szerint az utóbbi megfigyelt innovációktól függ, a GARCH pedig ehhez hozzáteszi, hogy a variancia emellett függ az utóbbi feltételes varianciáktól (varianciabecslésektől) is. A GARCH-modellek tehát két egyenlőséget írnak fel: egyet a piaci hozam átlagára, egy másikat (itt szerepel az ARCH- és a GARCH-tag) a varianciára. Elemzéseinkben ez a második egyenlet játssza a főszerepet. Voltaképpen a variancia egyenlete egy korábbi varianciaértékre autoregresszív (GARCH-tag) és egy reziduumra mozgóátlagolást illesztő tagra (ARCH-tag) bontható.

Általános formában a GARCH( $p, q$ ) modell:

$$r_t = \mu + \eta_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t+1-i}^2,$$

<sup>10</sup> A modellek szisztematikus leírása megtalálható például *Hamilton* [1994], illetve áttekintő tárgyalása *Mills* [1993] írásában.



azaz a tárgynapi feltételes variancia becsülhető az utolsó  $q$  innováció és az utolsó  $p$  feltételes variancia függvényeként. A modellben az  $\alpha$  együtthatók az ARCH-tagokra, a  $\beta$  együtthatók a GARCH-tagokra vonatkoznak. Gyakran elégséges a GARCH(1,1) modellt alkalmazni (Goorbergh–Vlaar [1999]), azaz a becslés tárgya a következő egyenlet:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\eta_t^2.$$

A GARCH(1,1) modell kibontható a következő formában:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta[\omega + \alpha\eta_{t-2}^2 + \beta\sigma_{t-2}^2] = \dots = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \eta_{t-j-1}^2.$$

A GARCH-modell segítségével végső soron arra kívánunk becslést adni, hogy a legutolsó hozam alakulásának ismeretében, ugyanakkor figyelembe véve valamilyen szinten a régebbi megfigyeléseinket, *várhatóan* mekkora szintű lesz az átlagtól (0-tól) való eltérés a következő időszakban (napon). A modellre tekintve látható, hogy az miként veszi figyelembe a volatilitások klasztereződését: ha nagy volt a volatilitás az utóbbi napokban, az előrejelzés is magasabb volatilitást fog adni. A volatilitások gyakran az átlaghoz való visszatérés (*mean reversion*) jelenségét mutatják, azaz relatíve hosszabb távon mindig visszatérnek egy adott szinthez. Amennyiben fennáll, hogy  $\alpha + \beta < 1$ , belátható, hogy ez a konstans szint (Engle–Mezrich–Bielinski [1997]):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_{t+k|t}^2) = \bar{\omega}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}.$$

Ekkor a volatilitás előrejelzése a következő formában tehető meg:

$$\sigma_t^2 = \bar{\omega} + \alpha(\eta_{t-1}^2 - \bar{\omega}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \bar{\omega})$$

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \bar{\omega} + (\alpha + \beta)^{k-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\omega}).$$

Amennyiben tehát fennáll, hogy  $\alpha + \beta < 1$ , a feltételes variancia átlaghoz való visszatérést (*mean reversion*) mutat, azonban ha  $(\alpha + \beta)$  1-hez közeli érték, a sokkhatás hosszú távon fejt ki hatását (*persistence*). Az átlaghoz való visszatérés sebességét az  $\alpha + \beta$  összeg határozza meg: minél nagyobb a két faktor összege, egy pillanatnyi sokk annál inkább permanensen gyakorol hatást a volatilitás alakulására,  $\alpha + \beta = 1$  esetén pedig tehát a volatilitás *perzisztenciájáról* beszélünk.

A GARCH-modellek paramétereit *loglikelihood* módszerrel becslik. A loglikelihood függvények összegét maximalizálják iteratív módon az ismeretlen paraméterek szerint. Alapesetben és leggyakrabban a GARCH becslése során feltételezzük az innovációk (tulajdonképpen a standardizált napi hozamok) normális eloszlását. Ekkor a

$$l_t(\eta_{t+1}) = -\ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \frac{\eta_{t+1}^2}{2\sigma_t^2}$$

loglikelihood függvények összegét kell maximalizálni. A BUX-ra és a DJIA-ra az utolsó 500 hozam alapján elvégzett GARCH-becslés során a következő paraméterek adódtak<sup>11</sup> (2. táblázat).

<sup>11</sup> A becslés futtatása során a napi hozam várható értékére is kapunk becslült értéket, ezt azonban napi hozamok esetében elhanyagolhatónak tekinthetjük. Tíznapos VAR-becslés esetében már nem feltétlenül lenne elfogadható ez az eljárás.

2. táblázat  
Becslési eredmények

Paraméter	Becslés	Standard hiba
	százalék	
	BUX-GARCH (1,1)	
$\omega$	0,00267	0,000601
$\alpha$	11,94	2,04
$\beta$	83,55	2,68
	DJIA-GARCH (1,1)	
$\omega$	0,000697	0,000294
$\alpha$	6,64	1,56
$\beta$	89,27	2,58

Az eredményeket összehasonlítva azt láthatjuk, hogy a DJIA-ra megbízhatóbban lehetett a paramétereket becsülni, és a DJIA volatilitása kevésbé érzékeny az utolsó hozam alakulására, mint a BUX. Látható azonban az is, hogy mindkét esetben elég közel van a két együttható összege 1-hez, ami arra utal, hogy a sokkok hatása viszonylag hosszú távon is fennmaradhat. A VAR-becsléseket a normális szórásnál leírtak szerint kell itt is végrehajtani:  $VAR_p = W_i N^{-1}(p) \sqrt{\omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \eta_t^2}$ .

A GARCH-modell adekvátságának ellenőrzése során meg kell vizsgálnunk a becslés után standardizált reziduálisok eloszlását. Jól becsült modell esetében a standardizált reziduumoknak függetleneknek kell lenniük, és olyan eloszlást kell követniük, amelyent feltételezve a GARCH-becslést végrehajtottuk. A *feltételes normalitáson* alapuló GARCH-illesztés után a standardizált reziduumok már jóval közelebb kerültek a standard normális eloszláshoz, azonban a normalitást (kiváltképpen a BUX esetében) még így sem teljesítik (5. ábra).

*Exponenciális súlyozású mozgóátlag (EWMA)*

Az exponenciális súlyozású mozgóátlagolás első megközelítésben a mozgóátlagolás olyan módosítása, amikor a megfigyelések időben visszafelé haladva egyre kisebb súlyt kapnak:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{s=1}^n \lambda^{s-1} (r_{t-s} - \bar{r})^2}{\sum_{s=1}^n \lambda^{s-1}}.$$

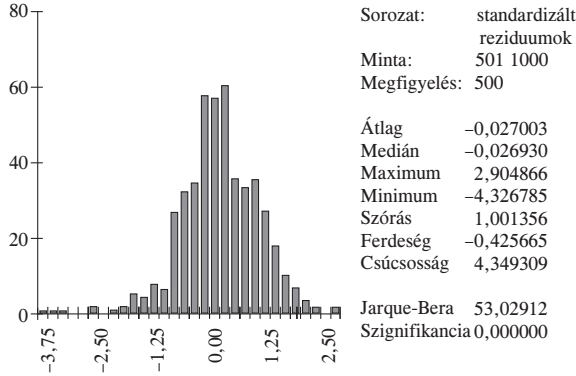
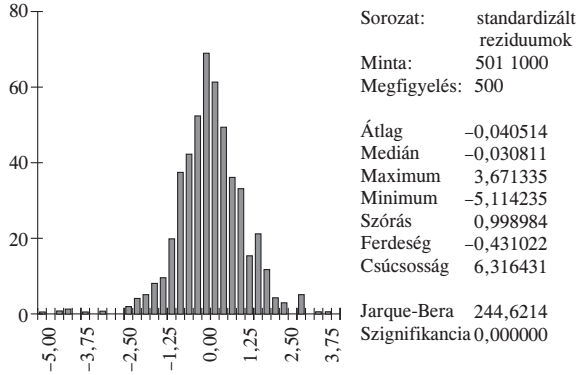
A képlet kifejezi, hogy a legutolsó hozammegfigyelés kapja a legnagyobb súlyt, majd időben visszafelé haladva, egyre kisebb súlyokat adunk az egyes megfigyeléseknek. Legyen a  $\lambda$  paraméter 0-, ...,  $n$ -edik hatványainak az összege  $S$ . Ekkor felírható, hogy:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{s-1} = S, \text{ azaz } S = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Míndezek figyelembevételével az alapformula átírható egyszerűbb alakra:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{s=1}^n \lambda^{s-1} (r_{t-s} - \bar{r})^2.$$

5. ábra  
BUX és DJIA GARCH standardizált reziduumok



Belátható továbbá, hogy *végtelen* hosszú visszatekintési periódus esetén a megfigyelési súlyok összege 1, mivel  $(1 - \lambda) \sum_{s=1}^n \lambda^{s-1} = (1/S)\mathcal{S} = 1$ .

Ugyanakkor az EWMA-modell jól leírja a piaci folyamatok heteroszkedasztikus jellegét is, így rokon vonások fedezhetők fel a GARCH-modellekkel (*Alexander-Leigh* [1997]). A variancia becslése (0 várható napi hozamot feltételezve) a következő alakban tehető meg. Egyúttal láthatjuk azt is, hogy valóban egy speciális GARCH (1,1) alakra jutottunk:

$$\sigma_{1,t+1|t}^2 = (1 - \lambda) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s r_{1,t-s}^2 = \lambda \sigma_{1,t|t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{1,t}^2.$$

Az EWMA a GARCH(1,1) modelltől az első tagjaként felírt konstansban tér el (ez az EWMA esetében zéró). Mint láhattuk, ez a konstans azonban a hosszú távú volatilitás-előrejelzésben tölt be kulcsfontosságú szerepet: amennyiben az átlaghoz való visszatérés (*mean reversion*) jelenség jellemzi az adott idősort. Az eltérés azonban nemcsak technikai, hanem végső soron elméleti eltérés is, ugyanis nem feltételezünk tovább hosszú távon állandó várható varianciaszintet. Eltűnik tehát a hosszú távú volatilitást meghatározó konstans, viszont fennáll az  $\alpha + \beta = 1$  egyenlőség, így az ARCH-tagot  $(1 - \lambda)$ , a GARCH-tagot pedig  $\lambda$  súllyal vesszük figyelembe. Ez, a volatilitást hosszú távon is persisztens folyamatként jellemző modell olyan *integrált GARCH*-modell (lásd például

Varikooty-Liu-Huang [1997]), amelynek konstans tagja zéró, így a különböző távra szóló előrejelzések nem konvergálnak valamilyen hosszú távú átlaghoz. Az EWMA-modell

$$\sigma_{1,t+1|t}^2 = (1 - \lambda) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s r_{1,t-s}^2 \text{ felírása hasonló alakot ölt, mint a GARCH-ra felírt } \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j-1}^2,$$

amennyiben  $\omega$ -t zérónak tekintjük. Innen látható, hogy a GARCH esetében a teljes perzisztencia – hasonlóan az EWMA-hoz – akkor teljesül, ha fennáll az  $\alpha + \beta = 1$  egyenlőség, hiszen ekkor a két alak azonossá válik.

Az optimális  $\lambda$  paraméter becsléséhez a következő kifejezést kell minimalizálni az OLS eljárás szerint:

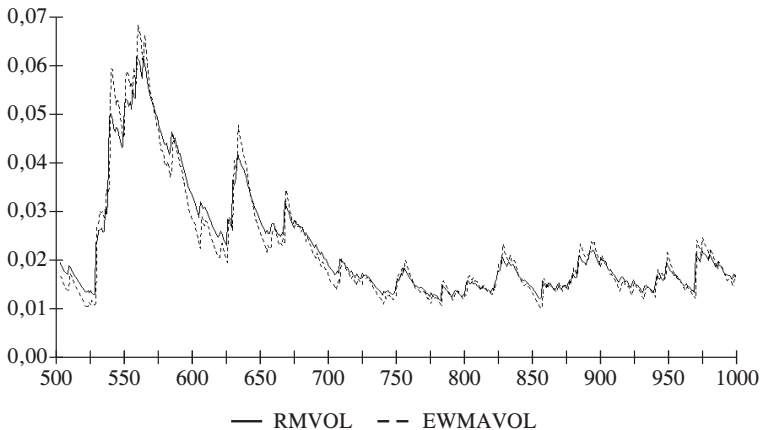
$$\sum_{t=1}^T [r_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2(\lambda)]^2 \rightarrow \min .$$

Gyakorlati okból ugyanakkor meg kell említenünk, hogy a *J. P. Morgan* [1996] *RiskMetrics* standardja a napi VAR-számításra a  $\lambda = 0,94$ , havi becslésre pedig a  $\lambda = 0,97$  állandó értéket használja a paraméterek újrabecslése nélkül. (A 0,94 érték tehát azt jelenti, hogy az utolsó megfigyelést 6 százalék, az utolsó előtti  $0,94 \times 6$  százalék, ... súllyal veszik figyelembe.) Könnyen belátható, hogy nagyobb  $\lambda$  paraméter esetében nagyobb a visszatekintési időszak, viszont kisebb súlyt kap az utolsó megfigyelés.

A 6. ábrán összehasonlítás látható a BUX volatilitás exponenciális súlyozású mozgólágaról: az RMVOL a 0,94-es súlyú *J. P. Morgan* standard szerinti, az EWMAVOL a BUX-ra egyedileg becsült optimális súly szerinti volatilitásbecslés (az optimális súly 0,906). Az optimális faktor kisebb a 0,94-nél, ami azt jelenti, hogy az utóbbi megfigyelések nagyobb súlyt kapnak, ugyanakkor rövidebb a visszatekintési periódus. A 0,94-es esetben lassabb „reakcióidőhöz” jutunk, ami a drasztikus események után kisebb volatilitásbecslést jelent, viszont lassabb a lecsengés is.

6. ábra

RMVOL és EWMAVOL volatilitásbecslés



### Időszakfüggetlen eloszlás a normalitáson túl

Ebben a fejezetben két alternatív megoldást tekintünk át, amelyekkel vastag szélű eloszlásokat kezelhetünk, de nem feltételezzük az eloszlások szórásának feltételelességét.

#### Student-féle $t$ -eloszlás

Amint a bevezetőben már szó volt róla, a normalitás modelljeit leginkább a *vastag szélek* figyelmen kívül hagyása miatt érik bírálatok, holott pont ezek a szélek a kockázatkezelés legkritikusabb részei az eloszlás tekintetében. A normális eloszlással szemben (és most az eloszlást időtől függetlennek tekintjük) alternatív megoldásként választható a  $t$ -eloszlás. Ha  $\xi_i$  és  $\eta$  független és standard normális eloszlású változók, akkor a

$$t = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n\eta}}{\chi}$$

módon képzett  $t$  változó  $n$  szabadságfokú *Student-féle*  $t$ -eloszlást követ. Az  $n$  elemszám (azaz a generálásban részt vevő  $c^2$ -es – négyzetre emelés előtt standard normális – tagok számának) növelésével a  $t$  eloszlás közelíti a standard normális eloszlást. A  $t$ -eloszlás normális eloszlástól való eltérése  $n$  30 fölötti értékeinél gyakorlati szempontból már nem érzékelhető.

A  $t$ -eloszlásnak 3 jellemző paramétere van: a  $\mu$  lokációs paraméter, a  $\gamma > 0$  területi (vagy skálázódási) paraméter és a  $\nu > 0$  szabadságfok. Egy  $x$ ,  $t$ -eloszlású véletlen változó  $\mu$  átlaggal (feltéve, hogy  $\nu > 1$ ) és  $\nu\gamma^2/(\nu-2)$  varianciával (feltéve, hogy  $\nu > 2$ ) jellemezhető. Amennyiben  $\nu$  a végtelenhez tart, a  $t$ -eloszlás  $\mu$  várható értékű és  $\gamma^2$  varianciájú *normális* eloszláshoz közelít. Minél kisebb azonban a szabadságfok, annál inkább vastag szélű a  $t$ -eloszlás. A *standard*  $t$ -eloszlás sűrűségfüggvénye a következő módon írható le (ahol a  $\Gamma(\cdot)$  jelenti a *gamma*-függvényt):

$$f(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{(v\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)} [1 + (x^2/\nu)]^{-(\nu+1)/2}.$$

Abban az esetben, ha feltételezzük az  $r_t$  hozamok  $t$ -eloszlását, analitikus *maximum likelihood* becsléssel határozhatjuk meg a tapasztalati paramétereiket.<sup>12</sup> A maximalizálandó loglikelihood függvényt a következőképpen írhatjuk fel:

$$L = T \left[ \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi \nu - \ln \gamma \right] - \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left[ 1 - \left( \frac{r_t - \mu}{\gamma\sqrt{\nu}} \right)^2 \right].$$

A BUX-ra végrehajtott becslés eredményeként az átlagos loglikelihood érték 2,48-at, a DJIA-ra 3,08-at ért el, a paraméterekre az utolsó 500 nap alapján 3. táblázatban szereplő becslések adódtak.

A BUX esetében a  $\gamma$  és a szabadságfok felhasználásból becsült volatilitás értéke 2,95 százalék (az empirikus volatilitás az utolsó 500 napra számítva 2,72 százalék volt).

A  $\gamma$  és a szabadságfok ismeretében a becsült volatilitás értéke a DJIA indexre 1,29 százalék (az empirikus volatilitás ugyancsak 1,29 százalék volt). A szabadságfokok össze-

<sup>12</sup> A  $t$ -eloszlás alkalmazásáról bővebben lásd *Fernandez-Steel* [1996].

3. táblázat  
 Paraméterbecslések az utolsó 500 nap alapján  
 (Student-féle eloszlás)

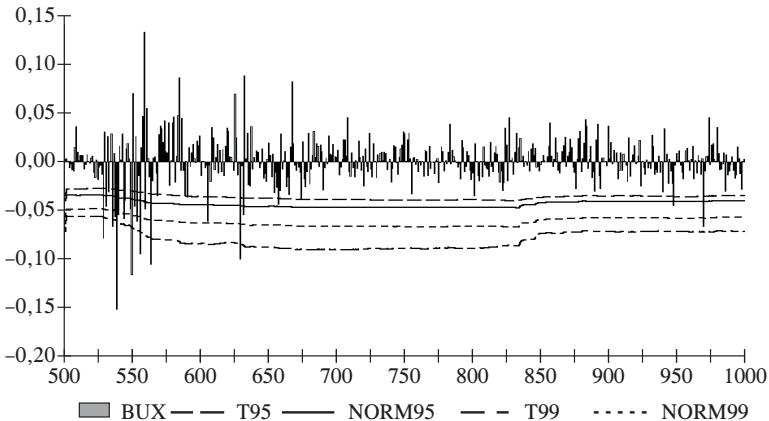
Paraméter	Becslés	Standard hiba
BUX <i>t</i> -eloszlás		
$\mu$	0,0576	0,0808
$\gamma$	1,4405	0,0883
$\nu$	2,6279	0,3984
DJIA <i>t</i> -eloszlás		
$\mu$	0,0411	0,0534
$\gamma$	1,0498	0,0560
$\nu$	5,8491	1,4046

hasonlításakor igazolódik az a csúcosságok összehasonlításából leszűrhető feltevésünk, hogy a BUX jóval csúcsosabb és vastagabb szélű eloszlást követ a DJIA-nél.

A *t*-eloszlást felhasználva, a VaR-becslés meghatározása:  $VaR = -W_0 F_v^{-1}(p)\gamma$  formában végezhető el, ahol  $F_v^{-1}(p)$  a standardizált inverz *t*-eloszlás függvény. Megemlítendő, hogy bár a már említett módon a *t*-eloszlásra is kiszámítható a *variancia*, a kockázati becslést a *gamma* paraméter felhasználásával tesszük meg.

A 7. ábrán a BUX utolsó 500 napi nyereségeit és veszteségeit, valamint a 95 százalékos és 99 százalékos konfidenciaszinten becsült VaR-értékeket ábrázoljuk, napi szinten újrabe-csült normál szórás, illetve *t*-eloszlási paraméterek mellett.

7. ábra  
 BUX-eredmények és VaR-értékek



A 7. ábrán látható négy vonal közül a két belső tartozik a normális eloszláshoz, a legbelső és a legkülső vonal pedig a *t*-eloszláshoz. Ez már önmagában jól szemlélteti, hogy a *t*-eloszlás magas szignifikanciaszinten nagyobb átlagtól számított távolságot fog át, így a lehetséges nagy veszteségeket jobban előre jelezheti. Hátrány azonban, hogy a VaR-becslések sokkal lassabban reagálnak a piac *volatilitásának* a változására, mint például a GARCH-modellek. Ebben a lomhaságban persze szerepe van annak is, hogy para-

méterbecsléseink 500 napos bázison nyugszanak. (Ne feledjük azonban, hogy a kereskedési könyvi szabályozás is legalább egyéves megfigyelési periódust fog előírni a saját modellek esetében!)

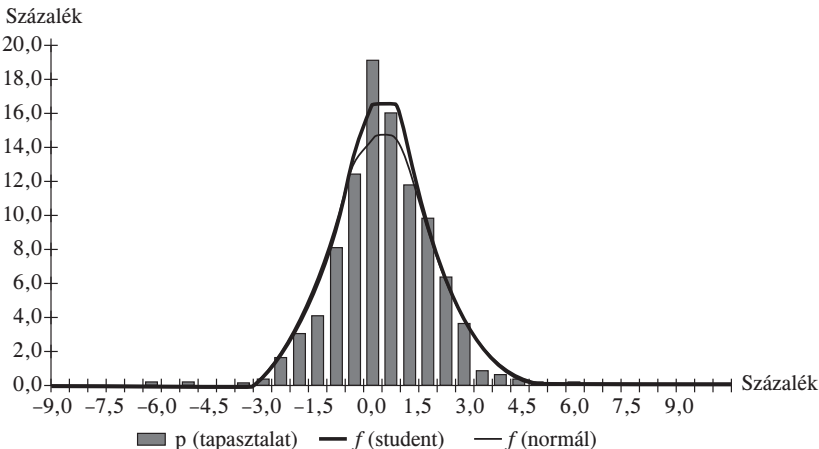
Megemlítendő, hogy a Monte-Carlo-szimulációk során a standard  $t$ -eloszlású változók generálásakor  $\nu$  szabadságfokú, 0 várható értékű, és 1 gammájú (tehát nem 1 szórású) véletlen számokat kapunk. Ezért a generálás során a tapasztalati paraméterek szerint kell transzformálnunk a generált értékeket:  $x_t = \mu + \zeta(\nu) * \gamma$  ahol  $\zeta(\nu)$  standard  $\nu$  szabadságfokú  $t$ -eloszlású véletlen változó.

A  $t$ -eloszláson alapuló módszernek sajnos van azonban egy komoly korlátja is. A  $t$ -eloszlások momentumai a szabadságfok egész részéig léteznek. Így mivel a DJIA-nak 5,6 volt a szabadságfoka, a generált véletlenszámok viszonylag stabil kurtikusságot (mint 4. centrális momentumot) mutatnak. A BUX-ra  $t$ -eloszláson alapuló Monte-Carlo-szimulációs módszer nem lenne megfelelő, mivel 2,6-os szabadságfoka miatt rendkívül durva, értelmezhetetlenül szélsőséges eredmények is bekerülnének a szimulációba. Ugyanakkor a legtöbb VaR-számító szoftver esetében a Monte-Carlo-elemzések során leggyakrabban normális eloszlású, véletlen változók jelentik a kiindulási állapotot. Ezt sokelemű portfóliók esetében több alkalmazó azért tartja elfogadhatónak, mert bár elképzelhető, hogy az egyes tagok  $t$ -növekményűek, a divezifikációval (ami a centrális határeloszlás tétele szempontjából az elemszám növekedésének gyakorlati megvalósulásaként fogható fel) az együttes eloszlás már közelít a normálishoz. Ennek a feltevésnek a hazai piacon történő igazolása persze további vizsgálat tárgya lehet.

Kérdés, hogy mennyire illeszkedik jól a tapasztalati eloszláshoz a becsült  $t$ -eloszlás. A tanulmány elején leírt *illeszkedésvizsgálat* elvégzése után arra juthatunk, hogy az utolsó 500 nap esetén a DJIA esetében igen magas, 55 százalékos szignifikanciaszinten fogadható el a  $t$ -eloszlás nullhipotézise. A BUX esetében azonban a vizsgálat nem igazolta a  $t$ -eloszlás tényét. A 8. ábra a DJIA illeszkedését mutatja (feltüntetve egyúttal a tapasztalati paramétereknek megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvényét is).

8. ábra

A DJIA utolsó 500 napi hozamának eloszlása és illesztése



## Diffúz normálmodellek

Sok modell alapszik normális eloszlások kombinációján (*mixture of normals*). A módszer lényege, hogy egyfelől feltételezzük a normális üzletmenetet (a „normalitást” ezúttal statisztikailag is szó szerint értelmezve), ugyanakkor feltesszük, hogy a háttérben egy másik, a szélsőséges sokkhatásokért felelős folyamat is húzódik. Az ilyen modelleket ugrásos diffúz (*jump-diffusion*) névvel is illetik, ugyanis a normális üzletmenetbe a szokatlan sokkokat jelképező ugrásokat is beillesztik.

A legegyszerűbb *ugrásos diffúz* modell esetében két normális eloszlású változó (illetve az eredményváltozó) kapcsolatát egy harmadik, nem normális (hanem például egy Bernoulli-<sup>13</sup> változó vagy egy Poisson-eloszlású) véletlen változó határozza meg. A ugrásos diffúz modell legegyszerűbb felírása (*Venkataraman* [1997]):

$$\begin{aligned}\eta_t &= (1 - \lambda_n)r_t^n + \lambda_r r_t^\beta \\ r_t^n &\sim N(\mu; \sigma^2) \\ r_t^\beta &\sim N(\mu; \tau^2) \\ \lambda &= [1, 0]p, (1 - p)\end{aligned}$$

A  $\eta$  eredményváltozó esetére a normalitás már nem áll fenn. Kérdés, hogy miként becsülhetők a modell paraméterei. A normál ugrásos Bernoulli-modell könnyen parametrizálható: feltételezzük, hogy a hozamok  $(1 - p)$  valószínűséggel normáloszlást követnek,  $\sigma^2$  varianciával, azonban  $p$  valószínűséggel a variancia megnövekszik  $\tau^2$  értékre (ezek a sokkhatások), noha a normalitás ekkor is fennmarad (ugyanakkor az *együttes eloszlás* tekintetében ez már nem teljesül!).

Az együttes eloszlás sűrűségfüggvényének meghatározásakor a valószínűségi számításból ismert tételből kell indulnunk, mely szerint  $A$  és  $B$  esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége:  $P(A \& B) = P(A|B)P(B)$ . Így ha tudjuk, hogy a véletlen változónk  $(1 - p)$  valószínűséggel normális eloszlású folyamat  $\sigma^2$  varianciával,  $p$  valószínűséggel pedig normális eloszlású folyamat  $\tau^2$  varianciával, akkor:

$$f(\eta_t) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{p}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left(-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\tau^2}\right).$$

Ebből adódik, hogy a modell paramétereinek meghatározásához felhasználható, maximalizálandó loglikelihood függvény:

$$L = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \frac{1-p}{\sigma} \exp\left[-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{p}{\tau} \exp\left[-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\tau^2}\right] \right\},$$

ahol  $\mu$  a hozamok várható értéke.<sup>14</sup> A becslést ezúttal az 1000 adatra végeztük el. A DJIA-ra kapott paraméterbecsléseket a 4. táblázat felső része mutatja. A BUX-ra kapott becslési értékeket a táblázat alsó része tartalmazza. A becslött paraméterek szerint a DJIA körülbelül az esetek 7 százalékában az általában normálisan elfogadható szintű ingadozásánál magasabb volatilitást mutatott. Az alapvolatilitás azonban itt 0,97 száza-

<sup>13</sup> A Bernoulli-változók 1 vagy 0 értéket vesznek fel [ $p$ , illetve  $(1-p)$  valószínűséggel]. Bernoulli-változót egyszerűen lehet generálni 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású véletlen változó segítségével: ha a véletlen szám  $p$  alatti érték, akkor vesz fel 1, egyéb esetben 0 értéket a véletlen változónk. A Bernoulli-változók összessége binomiális eloszlással jellemezhető.

<sup>14</sup> Alternatív becslési eljárásról lásd *Beckers* [1981].



lék, ami kisebb a teljes eloszlás 1,16 százalékos értékénél. Az átlagos volatilitás valójában ketté lett bontva egy nagyobb gyakoriságú alacsony, és egy kisebb gyakoriságú magas volatilitástagra.

4. táblázat  
Paraméterértékek 1000 adatra  
(diffúz normálmodell)

Paraméter	Becslés	Standard hiba
		DJIA
$\sigma$	0,97	0,0336
$\tau$	2,57	0,3523
$\pi$	7,16	2,79
$\mu$	0,086	0,033
		BUX
$\sigma$	1,5	0,0459
$\tau$	5,88	0,5205
$\pi$	10,03	1,895
$\mu$	0,21	0,054

A BUX hozamainak 1000 napra számított szórása 2,346 százalék volt. Ez közel megegyezik a  $\sqrt{p\tau^2 + (1-p)\sigma^2} = 2,342$  százalékos értékkel. Monte-Carlo-szimuláció során a BUX esetében a már korábban említett okok miatt célszerűbb lehet inkább ezt a kevert modellt alkalmazni a  $t$ -eloszlással szemben.

Meg kell jegyezni, hogy a GARCH- és a kevert normálmodellek kapcsolatban állnak egymással. Az eddig tárgyalt GARCH-modell esetében feltételeztük a normalitást, mivel azonban a volatilitás napról napra változik, a piaci hozamokat úgy tekintettük, mintha számtalan normális véletlen generátorból származnának, tehát végső soron ott is egy különleges fajta normál kevert (*normal-mixture*) jelenségről van szó. Az itt tárgyalt keverteloszlás-modellek azonban időfüggetlenek, tehát ebben az esetben nem lehet a perzisztencia jelenségről beszélni. A normál diffúz modellek esetén más problémával is találkozunk: az ugrások ugyanis nem figyelhetők meg közvetlen módon. A GARCH-modellek esetén a napi hozamokat könnyen standardizálhattuk, hiszen minden napra meg tudtunk határozni egy feltételes volatilitásértéket. Ezzel szemben a normál diffúz esetében nem tudjuk naponta biztosan megmondani, hogy az adott napi megfigyelt hozam éppen az alapfolyamatból vagy az ugrásokat magyarázó másik folyamatból származik. Abban az esetben, ha kiugró pozitív vagy negatív hozamérték volt megfigyelhető, úgy érezhetjük, hogy valószínűleg az ugrásos folyamathoz tartozott, de lehet éppen egy adott napi ugrásos érték meglepően kicsi is, hiszen annak a hátterében is egy normális folyamat húzódik (csak a két folyamat keveredését okozza a Bernoulli- vagy Poisson-változó). Így az egyes megfigyelésekre csak valószínűségi becsléseket adhatunk.

A historikusan megfigyelt hozamadatainkat a modell tesztelése érdekében (azaz, hogy valóban normális eloszlást követ-e a két alapfolyamat) valamelyik alapfolyamathoz való tartozás valószínűsége alapján csoportosíthatjuk. Annak valószínűsége, hogy egy adott megfigyelés a nyugodt, normális alapfolyamathoz (és nem az ugrásokat jelentő magasabb volatilitású folyamathoz) tartozik:<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Hasonló gondolatmenet például Hamilton [1994].

$$P[\eta_t \sim N(\mu, \sigma^2)] = \frac{\frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]}{\frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{p}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(\eta_t - \mu)^2}{2\tau^2}\right]}$$

Így például a BUX esetében ha egy adott napon 1 százalékos hozamot tapasztalunk, 96 százalék valószínűséggel az alapfolyamathoz sorolhatjuk, míg egy 6 százalékos hozamot 98 százalék valószínűséggel az ugrásokat jelentő folyamathoz sorolnánk.

### Heteroszkedaszticitás és a normalitás hiánya

A normális eloszlást feltételező GARCH-modell ugyan jól alkalmazkodik a volatilitás klaszterezettségéhez, de a vastag szélék problémáját még így sem feltétlenül kezeli mindig elég hatékonyan. Ezért célszerű lehet egy olyan GARCH-becslést is végrehajtani, ahol a standardizált innovációk (illetve praktikusán a napi hozamok) *t*-eloszlását feltételezzük (Hamilton [1994]). Az innovációk optimalizálandó feltételes *loglikelihood* függvénye a következő alakban írható fel:

$$l_t(\eta_{t+1}) = \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi(\nu-2) - \ln \sigma_t - \frac{\nu+1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\eta_{t+1}}{\sigma_t \sqrt{\nu-2}} \right)^2 \right]$$

A BUX-ra (az utolsó 500 nap adatai alapján) végzett becslés során 2,48 átlagos *loglikelihood* érték mellett az 5. táblázatban szereplő értékekre juthatunk. A DJIA-ra adott becslések ezúttal is pontosabbnak bizonyulnak 3,11 átlagos *loglikelihood* érték mellett.

5. táblázat  
*t*-eloszlású GARCH-paraméterbecslés  
(*loglikelihood* függvény)

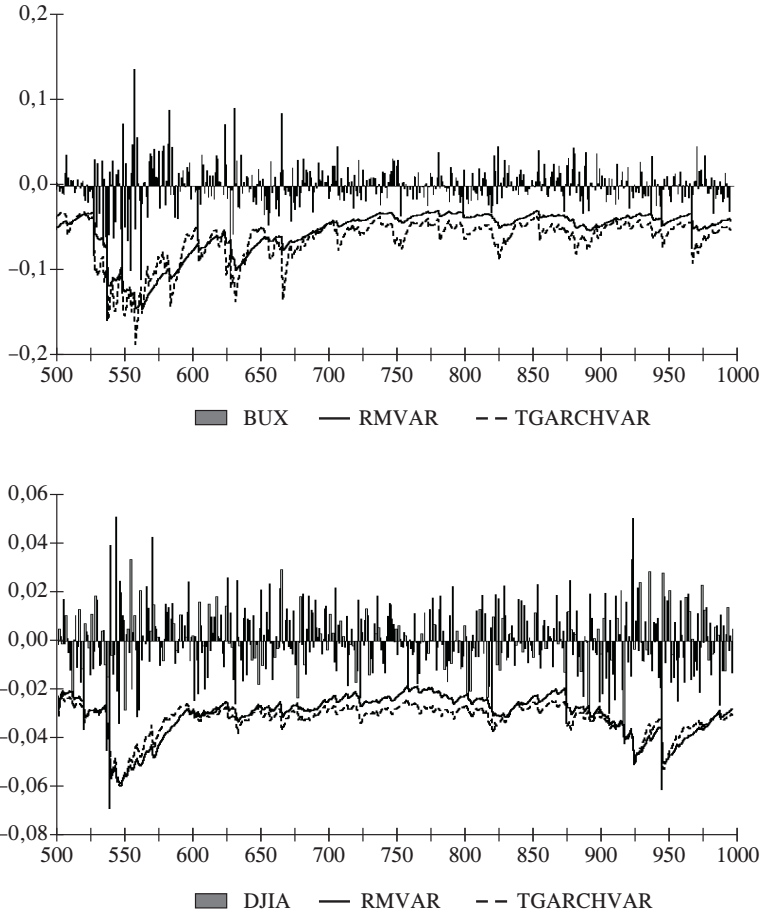
Paraméter	Becslés	Standard hiba
BUX		
$\omega$	0,00199	0,00089
$\alpha$	9,28	3,25
$\beta$	87,61	3,66
$\nu$	4,236	0,8512
DJIA		
$\omega$	0,0013	0,00056
$\alpha$	6,46	2,96
$\beta$	85,63	5,14
$\nu$	7,6192	2,423

A modell helyességének tesztelése hasonlóképpen történhet, mint azt a GARCH-modellnél tettük. A napi standardizált reziduumok illeszkedését azonban ezúttal nem a normális, hanem – a *t*-eloszlás ismertetésénél már leírtak szerint – a *t*-eloszláshoz kell viszonyítani.

A 9. ábrán látható, hogy az iparági standardnak tekinthető *RiskMetrics* 0,94-es súlyozású EWMA és a paraméterek napi újrabecslése melletti *t*-GARCH-módszerrel mekkora 99 százalékos VAR-értékek adódtak a BUX-, illetve a DJIA-indexekre. A két modell

üteme, jellege megegyezik, ugyanakkor a lecsengés sebességében és a volatilitás terjedelmében mutatkozhatnak különbségek. Látszólag nincsenek nagy eltérések, ám a VAR szempontjából az összehasonlítást mégis érdemes megfigyelni.

9. ábra  
BUX és DJIA 99 százalékos VAR-becslések



### Az elemzések eredményeinek összehasonlítása

Az eddigiekben bemutatott eljárásokat a BUX és a DJIA 500 napos idősorára elvégezve – a *RiskMetrics* standardot kivéve, minden modellre napi paraméter-újrabecsléssel –, a 10. táblázatban összegezhetők a VaR-számítási eredmények. A vastagon szedett számok jelölik azokat az eseteket, amelyek érezhetően jó találati aránynak számítanak. A modellek elfogadhatóságát a Kupiec-féle teszttel, 95 százalékos szignifikanciaszinten vizsgáltuk.

10. táblázat  
A VAR-eredmények összefoglalása

Megnevezés	Szigni- fikancia- szint (százalék)	BUX-index		DJIA-index	
		hibaarány (százalék)	Kupiec-teszt	hibaarány (százalék)	Kupiec-teszt
<i>N</i> -szórás (500 napos)	95	4,00	Elfogadható	5,60	Elfogadható
	99	2,40	<i>Elutasítva</i>	2,00	<i>Elutasítva</i>
	99,5	1,80	<i>Elutasítva</i>	1,60	<i>Elutasítva</i>
<i>N</i> -szórás (250 napos)	95	4,40	Elfogadható	6,00	Elfogadható
	99	1,80	Elfogadható**	2,20	<i>Elutasítva</i>
	99,5	1,60	<i>Elutasítva</i>	1,60	<i>Elutasítva</i>
<i>t</i> -eloszlás	95	<b>5,00</b>	Elfogadható	6,60	Elfogadható
	99	1,40	Elfogadható	1,40	Elfogadható
	99,5	<b>0,60</b>	Elfogadható	1,00	Elfogadható
EWMA <i>RiskMetrics</i> *	95	<b>4,80</b>	Elfogadható	6,00	Elfogadható
	99	1,80	Elfogadható**	2,00	<i>Elutasítva</i>
	99,5	1,60	<i>Elutasítva</i>	1,20	Elfogadható**
GARCH (1,1)	95	4,60	Elfogadható	6,00	Elfogadható
	99	1,20	Elfogadható	1,60	Elfogadható
	99,5	1,20	Elfogadható**	1,20	Elfogadható**
<i>t</i> -GARCH	95	<b>5,00</b>	Elfogadható	5,80	Elfogadható
	99	<b>1,20</b>	Elfogadható	<b>1,20</b>	Elfogadható
	99,5	<b>0,80</b>	Elfogadható	0,80	Elfogadható

\*0,94 százalékos igazodási faktorial.

\*\*Határesetként fogadható el.

Természetesen e tanulmány keretei között nem lehetett arra vállalkozni, hogy abszolút rangsort állítsunk fel a parametrikus VaR-bebecslési eljárások között például a hazai piacra. Ennek már csak az is gátat szab, hogy az itt leírt módszerek az egyszerűbb, könnyen implementálható eljárások közé sorolhatók, míg például a leptokurtikus eloszlások vizsgálatára számos más eloszlásmodell is felírható lenne. Általános megállapításokat azért sem tehetnénk, mert az 500 napos VaR-idősorok *rövidek* ahhoz, hogy bizonyító erejű tapasztalatokat szerezzük valamely eljárás mellett vagy ellen, illetve az illusztrációként felhasznált tőzszeindex csak egyetlen kiragadott lehetséges termék a számtalan terméktípus közül. A 10. táblázat eredményeit vizsgálva, leszűrhetők azonban az alábbi következtetések:

- az időfüggetlen normalitás és állandó volatilitás mellett becsült VaR-érték magasabb szignifikanciaszinteken elutasításra kerül (99,5 százalékos szinten mind a BUX, mind a DJIA esetében itt volt a legnagyobb hibaarány);

- a feltételes eloszlásokon alapuló modellek nyugodt időszakban nem eredményeznek túl konzervatív VaR-értékeket, szemben az időfüggetlen eloszlásokkal, amelyek ekkor túlbecslik a VaR-értéket. Felerősödő volatilitás mellett viszont 99 százalék és 99,5 százalék mellett általában megbízhatóbbak a nemkondicionális modelleknél;

- a *t*-eloszlás bevezetésével megbízhatóbb VaR-értékekhez jutunk, az eloszlás kondicionalitásának feltételezése pedig még javítja a becslések pontosságát. Mind az időfüggetlen *t*-eloszláson alapuló modell, mind a *t*-eloszlású standardizált hibatagok mellett felállított GARCH-modell elfogadható volt a Kupiec-teszt szerint, azonban a GARCH-

modell általában jobb becsléseket eredményezett. Az időfüggetlen  $t$ -eloszlásnak azonban hátránya, hogy nem veszi figyelembe a klaszterezett volatilitásokat, éppen ezért nyugalmasabb időszakokban túl konzervatív VaR-értékeket becsülhetünk vele magas szignifikanciaszinteken.

### *Hivatkozások*

- ALEXANDER, C. O.–LEIGH, C. T [1997]: On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models; Journal of Derivatives, tavasz.
- BECKERS, S [1981]: A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Modell of Stock Returns. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. XVI.
- DUFFIE, D.–PAN, J. [1997]: An Overview of Value at Risk. Journal of Derivatives, tavasz.
- ENGLE, R. F.–MEZRICH, J. J.–BIELINSKI, B. M. [1997]: The Garch Approach to Volatility and Correaltion. Megjelent: Risk Management for Financial Institutions. Risk Publications és PriceWaterhouse, London.
- FERNANDEZ, C.–STEEL, M. F. J. [1996]: On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness. Center for Economic Research and Department of Econometrics, Tilburg University.
- GOORBERGH, R. W. J.–VLAAR, P. J. G. [1999]: Value-at Risk of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation? DNB Staff reports, No, 40.
- GREENE, W. H. [1990]: Econometric Analysis, MacMillan Publishing Co., New York.
- HAMILTON, J. D. [1994]: Time Series Analysis. Princeton University Press, Princeton, N. J.
- JORION, P. [1999]: A kockázatotott érték. Panem, Budapest.
- J. P. MORGAN [1996]: RiskMetrics Technical Document. New York, 4. kiadás.
- KUPIEC, P. [1995]: Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. Journal of Derivatives, 3. sz.
- MILLS, T. C. [1993]: The Econometric Modelling of Financial Time Series. Cambridge University Press, Cambridge.
- VARIKOOTY, A. P.–LIU, J.–HUANG, H. [1997]: Predictive Ability of Different Volatility Forecasting Techniques. Megjelent: Risk Management for Financial Institutions. Risk Publications és PriceWaterhouse, London.
- VENKATARAMAN, S. [1997]: Value at risk for a mixture of normal distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques. Economic Perspectives, Federal Reserve Bank of Chicago.