Közgazdasági Szemle, XLVII. évf., 2000. november (899–917. o.)

JANECSKÓ BALÁZS

Idősor-modellezés és opcióárazás csonkolt Lévy-eloszlással

Statisztikusok és pénzügyi adatelemzők számára jól ismert empirikus tény, hogy a pénzügyi ingadozások természete eltér a klasszikus, normális (Gauss) eloszláson alapuló leírástól. A pénzügyi matematika, illetve az elméleti pénzügyi irodalom mégis paradigmaként kezeli tovább a normális megközelítést – egyszerűsége és például az opcióárazási vagy portfólióoptimalizálási feladatban mutatott elegáns analitikus tulajdonságai miatt. E cikk célja az árfolyam-ingadozások realisztikusabb statisztikai képének bemutatása, valamint egy erre a modellre alapított opcióárazási megközelítés felvázolása. Nem célunk matematikai és technikai részleteket közölni – ezeket a hivatkozásaink alapján részletesen át lehet tanulmányozni –, hanem inkább az új modell szemléletes megvilágítására, illetve gyakorlati alkalmazhatóságának igazolására koncentrálunk. Árfolyam-ingadozási adatainkat a napi BUX záróárfolyam-idősorból származtattuk, az új statisztikai modell illesztését a napi BUX-hozamok példáján illusztráljuk, és az opcióárazási feladat megoldását a BUX-indexre vonatkozó európai call opciókra mutatjuk be. A bemutatott új modell a csonkolt Lévy-modell vonzó tulajdonsága, hogy három paraméteren keresztül képes az ingadozások széles tartományában pontosan leírni a fluktuációk valószínűségét, továbbá a „skála, farokvastagsági és csonkolási paramétereknek" szemléletes jelentés is tulajdonítható. Az új modell általában a piaci kockázatkezelésnek is hasznos eszköze lehet, különösen amiatt, hogy a gyakorlatban megfigyelt extrém események valószínűségére is reális számokat ad. *

A tanulmány rövid bevezető fejezettel indul, amelynek motivációs pontjában megadjuk azokat a főbb ösztönzőket, amelyek miatt érdemes az árfolyam-ingadozások realisztikus statisztikai leírására törekedni. Az első fejezetben bevezetésképpen az árfluktuációk közismerten nem normális és nem független jellegét illusztráljuk könnyen értelmezhető statisztikai függvények segítségével. Még ebben a pontban kitérünk a piaci kockázatkezelésben kiemelten fontos J. P. Morgan-féle (*J. P. Morgan* [1996]) *benchmark* sztochasztikus szórásmodell magyar tőkepiaci adaptációjára. A következő három rész a Lévy-eloszlások, illetve a csonkolt Lévy-eloszlások *(Truncated Lévy Distribution, TLD)* numerikus meghatározására, valamint azok valós statisztikákra illesztésére szolgáló gyors algoritmust mutatja be. A következő pontban a csonkolt Lévy-eloszlás paramétereinek stabilitását, időbeli fejlődését vizsgáljuk meg a magyar tőkepiac elmúlt tízéves története

* Köszönettel tartozom a Raiffeisen Bank vezetésének, hogy támogatta ezt a kutatást, továbbá kollégáimnak, különösen *Kondor Imrének* a fogalmazásban nyújtott segítségéért, valamint hasznos elméleti megjegyzéseiért, ötleteiért.

Janecskó Balázs a Raiffeisen Bank Rt. Piaci Kockázatok Elemzése főosztályának vezető munkatársa.

alapján. Azt tapasztaltuk, hogy a paraméterek időfüggése jól tükrözi a tőzsde jelentős eseményeit. A tanulmány utolsó szakaszában a csonkolt Lévy-eloszlás modellt opcióárazásra használjuk fel, és az eredményeket összevetjük Black és Scholes eredményével (*Black-Scholes* [1973]).

Bevezetés

A modern pénzügyi világban a piaci kockázatok felmérése és kezelése kiemelten fontos területté vált. Ennek a fejleménynek legfőbb kiváltó tényezőiként egyfelől a származtatott termékek (derivatívok) megjelenését és gyors térhódítását, másfelől az elmúlt évtizedek nagy tőzsdei összeomlásait lehet megjelölni. Az extrém kamat- és árfolyam-ingadozások jelentős, stabilnak hitt pénzügyi intézmények bukásához vezettek. Ezek az események a magánszféra és a pénzügyi szabályozók figyelmét is a piaci kockázatok mérési és kezelési problémájára irányította. A piaci volatilitás megértése a megfigyelt idősorok matematikai, statisztikai modellezését követelte meg. A probléma megoldásába a közgazdászok és ökonométerek mellett a számítógépes szakemberek, matematikusok, fizikusok[1] is bekapcsolódtak.

Általános tapasztalat, hogy az empirikus árfolyamingadozás-statisztikák a gyakorlatban fontos időskálákon nem tekinthetők normális, azaz Gauss-eloszlásúnak. Ez a tapasztalati tény akkor válik igazán fontossá, ha a lehetséges gyakorlati alkalmazásokra gondolunk. A legnyilvánvalóbb példa a fejlett világban az elmúlt két évtizedben kialakított, Magyarországon pedig napjainkban kibontakozó piaci kockázatkezelés. Ma már a hazai bankokban és brókercégekben is sorra független piacikockázat-kezelési osztályok jönnek létre, amelyeknek legfőbb funkciójuk, hogy azonosítsák, felmérjék és kezeljék a tőkepiaci árfolyamok (részvény- és devizaárfolyamok) és kamatok ingadozásaiból fakadó veszélyeket. Ezek abban állnak, hogy a piaci fundamentálisok ingadozása miatt a pénzintézetek értéke is kedvezőtlenül alakulhat. Ebben a megvilágításban világossá válik, hogy a piaci árfolyam- és kamatingadozások statisztikájának realisztikus modellezése megkerülhetetlen feladat.

A korábbi normális eloszlásra építő paradigma elméleti szépsége és kezelhetősége mellett (például két Nobel-díjas közgazdasági elmélet: a Markowitz-féle portfólióoptimalizálás vagy a Black–Scholes-féle opcióárazási modell is konstans szórású normális eloszlású árfolyam-innovációkat tételez fel) hamis képet alkot a valódi ingadozások természetéről, és – sajnos – kockázatkezelési szempontból a veszélyes irányba torzítja a képet. Arról az egyszerű tényről van szó, hogy a mindenki által ismert haranggörbe (amelynek két paraméterét: a várható értékét és a szórását egyszerűen a vizsgált pénzügyi hozamok statisztikai átlagaként és szórásaként lehet elvileg meghatározni) alulbecsüli a piaci kockázat fő forrását adó „nagy” ingadozások valószínűségét. A feladat tehát nyilvánvaló volt a kutatók számára: új és jobban illeszkedő eloszlásokat kell keresni.

Alapvetően két eltérő úton léptek tovább a kutatók. Az ökonométerek időben változó szórású, feltételes normális eloszlású modelleket fejlesztettek ki (az ARCH–GARCH-

[1] A tőzsde mint sok szereplős, viszonylag egyszerű szabályokkal leírható komplex rendszer került a tömegjelenségekkel foglalkozó statisztikus fizika érdeklődési körébe. Ennek nyomán a kilencvenes évek folyamán kezdett kibontakozni a statisztikus fizikának egy új, a gazdasági és pénzügyi problémákkal foglalkozó interdiszciplináris ága, amelynek tömör összefoglalóját *Mantegna–Stanley* [2000] adja meg. Az elmúlt években számos tanulmány született, amelyekben a tőzsdei kereskedés matematikai modelljének felállítása után elméleti következtetéseket vontak le a tőzsdei pénzügyi termékek árfolyam-ingadozásának statisztikai természetére vonatkozóan. Ugyanakkor sok kutató fizikus a saját módszertanával ugyanezen rendszer kísérleti vizsgálatába kezdett a közgazdászok, statisztikusok és ökonométerek után.

modellekről lásd *Engle* [1982] és *Bollerslev* [1986] úttörő cikkeit), mert ezek az árfolyam-dinamika modellek képesek realisztikus, „vastag farkú" és időben korrelált szórású árnövekményeket produkálni. A másik megközelítés időfüggetlen eloszlásfüggvényeket keresett az árstatisztikák leírására. E cikk ezt az utat kívánja bemutatni, de a tanulmány legvégén még röviden visszatérünk a sztochasztikus volatilitásmodellek lehetséges alkalmazásaira.

Elsőként *Mandelbrot* [1963] ismerte fel a Lévy-eloszlásban az árfolyam-ingadozás időfüggetlen eloszlásának jelöltjét. Ez az új függvény a normális eloszláshoz hasonlóan stabil eloszlás, azaz ha sok független Lévy-eloszlású véletlen értéket (például hozamot) összeadunk, akkor az eredményváltozó továbbra is Lévy-eloszlású marad. Ez a tulajdonság nagyon fontos lehet, hiszen ez teszi lehetővé, hogy egy adott (például napi) időskálán elvégzett statisztikai elemzés alapján következtetni tudjunk a hosszabb időintervallum (például egy év) alatt bekövetkező árfolyam-ingadozás természetére. Ez a lehetőség egyrészt az elégtelen adatmennyiség miatt lehet fontos (például független éves árfolyam-ingadozásból általában rendkívül kevés adat van), másrészt például az opcióárazási feladatban tudnunk kell, hogy az opció lejáratáig hátralévő idő alatt milyen valószínűséggel hová mozdulhat el a mögöttes folyamat.

A Lévy-eloszlás nagy előnye a normális eloszláshoz képest az, hogy szemmel láthatóan sokkal jobb illeszkedés érhető el az elvi és az empirikus hisztogramok között. Ez azt jelenti, hogy a Lévy-eloszlás a Gauss-eloszláshoz képest sokkal szélesebb hozamtartományban (megközelítőleg a szórás egyszerese helyett a szórás négy-ötszörösét lefedő hozamintervallumon) írja le „pontosan" mind a „kicsi", mind a „nagy" fluktuációk valószínűségét. A szimmetrikus Lévy-eloszlás a normális eloszláshoz hasonló módon két paraméterrel definiálható: az α *farokexponenssel* és a γ *skálaexponenssel*. A *farokexponens* tulajdonképpen azt mondja meg, hogy milyen hatványkitevővel cseng le a nagy ingadozások előfordulásának valószínűsége (pontosan $\chi^{-(1+\alpha)}$ szerint alakul), a *skálaexponens* pedig a lehetséges ingadozás-tartomány méretéért felelős, azaz minél nagyobb, annál nagyobb tartományban mozoghatnak a hozamok. A farokexponens értéke nulla és kettő közé eshet, és minél közelebb lesz a kettőhöz, annál inkább közelít a statisztika a normális vagy Gauss-eloszláshoz. Minél kisebb az α értéke, annál gyakrabban fordulhatnak elő „nem normális" nagy ingadozások, illetve extremális kracheseménye.

Számos mérési eredmény alapján mondhatjuk, hogy egyfajta „univerzalitással" a napi ingadozások Lévy-exponens értéke 1,1 és 1,6 között szóródik (*Mantegna–Stanley* [2000]), de gyakorlatilag nincs olyan pénzügyi idősor, ahol napi időskálán kettes Lévy-exponensű normális eloszlást tapasztalhatnánk. A Lévy-eloszlás tehát, úgy tűnik, tökéletes megoldás lehet a fluktuációk modellezésében. Ez azonban nincs teljesen így, egy apró kis finomításra még szükség van. Arról van ugyanis szó, hogy a Lévy-eloszlású véletlen hozamoknak végtelen nagy lenne a szórása. Ez egyszerűen azért van így, mert ha az eloszlás farka x^{-3}-nél lassabban cseng le, akkor a szórást megadó integrál divergens lesz. Ezt a megállapítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a „Lévy-farok túl vastag".

Erre a problémára kézenfekvő a megoldás a kilencvenes évek terméke (lásd *Koponen* [1995], *Mantegna* [1994], *Matacz* [2000], *Bouchaud–Potters–Cont* [1998]): a „vastag farkat csonkolni kell", azaz a hatványfüggvény-jellegű lecsengésnél egy bizonyos tartományon kívül gyorsabb lecsengést biztosító függvényalakot kell megszabni. Megjelenik tehát a λ *csonkolási paraméterrel* bővült háromparaméteres függvényalak. Az új paraméter tehát azt mondja meg, hogy hol van az a hozamszint, amelyen túl felgyorsul a hisztogram lecsengése. A csonkolt Lévy-eloszlás végeredményben tehát egy jól illeszkedő, véges szórású eloszlás lesz, amely viszont már nem stabil, hiszen az úgynevezett *centrális határeloszlás tétel* értelmében (amely szerint nagyszámú, véges szórású, azonos eloszlású és független véletlen változó összegzése a normális eloszláshoz vezet el) a sorozatos konvolúciók után a normális eloszláshoz fog konvergálni. Lesz tehát egy karakterisztikus időskála, amelyen túl normális, azon belül pedig csonkolt Lévy-eloszlású lesz az árfolyam-ingadozás. Ezt az úgynevezett átváltási *(cross-over)* időskálát a gyakorlatban is megfigyelhetjük, tipikus értéke egy hónap körül van. A csonkolt Lévy-modell további előnye, hogy egy bizonyos fokú analitikusságot is biztosít, hiszen bár egyszerű képlettel a függvény nem adható meg, de egy speciális integráltranszformáció (a Fourier-transzformáció) után a képlete zárt alakban felírható. A Gauss-képtől tehát eljutottunk a Lévy-, majd a csonkolt Lévy-modellhez. Ezen az úton vezet végig szemléletesen, a matematikai részleteket mellőzve ez a tanulmány. Gyakorlati alkalmazásként újra a kockázatkezelésre és az opcióárazásra kell utalni.

Motivációk. E tanulmány megírása konkrétan kettős célt szolgál. Egyfelől gyakorlatias, ismeretterjesztő jellegű, a statisztikai részletekben túlságosan nem elvesző, dinamikus árfolyam-ingadozás elemzési módszert mutat be, amely elég általános ahhoz, hogy tetszőleges pénzügyi idősorra (vagy akár egyéb idősorokra is) futtatható legyen. A MATLAB-ban megírt program megvizsgálja az idősor egyszerű statisztikai tulajdonságait, a fluktuációkra eloszlásokat illeszt. A program a teljes (optimalizációs lépéseket is tartalmazó) eljárást 5 és 10 perc közötti futási idő alatt teljesíti (egyszerű banki PC-n, 1000 adatra). A következő részben egy konkrét futtatás eredményét közöljük.

A tanulmány másik célja egy gyakorlati alkalmazás, nevezetesen: a nemrégiben a BÉT-en elindított, szabványosított európai index és részvényopciók árazása és kockázatkezelésének vizsgálata. Mint köztudott, a derivatív pénzügyi termékek árazása egyike a legnehezebb szakmai feladatoknak, mivel nemcsak a mögöttes folyamat világos statisztikai modellezését követeli meg, hanem ezen felül egy opcióárazási és dinamikus hedgelési matematika kidolgozását is. Az opciók kockázatkezelési feladatát mi a modern kockáztatott érték (VAR: Value at Risk) megközelítésben (*J. P. Morgan* [1996]) szeretnénk felvázolni: megadjuk a csonkolt Lévy-paraméterek függvényében, hogy adott időhorizonton és adott szignifikanciaszint (valószínűség) mellett maximálisan mekkorát ingadozhat az opció értéke. Az így meghatározott kockáztatott értéket egy brókercég például a napi változó letéti követelményében érvényesíthetné az opciókat kiírókkal szemben.

A napi BUX-ingadozások alaptulajdonságai

Egy pénzügyi ügylet piaci kockázatának feltárása lényegében ekvivalens a mögöttes, meghatározó piaci folyamatok statisztikájának pontos megértésével. Ebben a pontban egy konkrét példán (a BUX napi ingadozásain) mutatjuk be az árfolyam-ingadozások általánosnak mondható, közismert statisztikai tulajdonságait (real-time BUX statisztikai elemzés olvasható a következő cikkben: *Jánosi–Janecskó–Kondor* [1999]). Az illusztrációk a korábban már említett MATLAB szoftver segítségével készültek, bizonyos esetekben saját segédprogramok felhasználásával. Elemzéseinkhez a BUX 1996. január 11. és 2000. február 21. között feljegyzett (1021 darab) napi záróárfolyamát használtuk fel. Azért ezt az időszakot választottuk ki, mert itt minden lényeges statisztikai jellegzetességet szépen ki lehet mutatni, ugyanakkor ezen a hosszabb időskálán már bizonyos közelítő stacionaritás is érzékelhető. A BÉT kezdeti öt évét ebben az elemzésben nem tekinthetjük relevánsnak, hiszen az egy éretlen piac első lépéseit tükrözte (ugyanakkor ennek az időszaknak az elemzésére a későbbiekben még visszatérünk, amikor azt vizsgáljuk majd meg, hogy időben milyen dinamikával fejlődött a piac statisztikája). A kiválasztott periódusban hosszú távú exponenciális trend figyelhető meg (bár nyilvánvaló, hogy a trendek jellege erőteljesen és érzékenyen függ a kiválasztott időperiódustól), ugyanakkor az ázsiai és az orosz válság hatásai is érzékelhetők, tehát idősorunkban normális és szélsőséges napok egyaránt kellőképpen reprezentáltak.

Első lépésben idősorunkat az exponenciális trendtől tisztítottuk meg. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy a logaritmikus skálán ábrázolt BUX-árfolyamokra egy egyenest illesztettünk, és az illesztett egyenes értékeit levontuk az árakból. Ezzel a későbbi differenciálás után kényelmesen kezelhető, nulla várható értékű ingadozásokat állítottunk elő, amelyek kielégítik a stacionaritás feltételét, ami szemléletesen azt a jelenti, hogy az árfolyamokat generáló véletlen folyamat tulajdonságai lényegesen nem változnak az időben. Meg kell jegyezenünk azonban, hogy az adott időszak trendje gazdaságilag is indokolható, több, eltérő meredekségű altrendre is szétbontható lenne, illetve a trend kiszűrése az árfolyam-statisztikát csak triviális módon befolyásolja azzal, hogy a várható hozamokat nullára állítja be.

A mintaidőszak meglehetősen szubjektív kiválasztása és a trendszűrés után az árfolyamelemzésekben szokásos módon előállítottuk a logaritmikus differenciákat vagy más szóval a folytonos módszerrel számolt napi hozamokat.[2] Az így előállított ingadozások kumulatív eloszlásfüggvényét *(Cumulative Distribution Function, CDF)* az *1. ábra* bal oldali részén Gauss-papíron ábrázoltuk. Normális eloszlású változók eloszlásfüggvényének Gauss-papíron ábrázolása egy egyenest eredményezne. Az ábrán azonban jól látszik, hogy a szárnyakon jelentős az eltérés. Az eloszlásfüggvény adott x értéknél felvett értéke azt mondja meg, hogy a megadott x-nél kisebb ingadozások milyen valószínűséggel alakulhatnak ki. A mért empirikus eloszlásfüggvényt úgy szerkeszthetjük meg, hogy tetszőleges x hozamszintek mellett összeszámoljuk, hogy a megfigyelt hozamok hány százaléka maradt x értéke alatt. Az empirikus eloszlásfüggvény eltérése az egyenestől arra figyelmeztet, hogy a „nagy” árfolyam-ingadozások a normális statisztika által adott gyakoriságnál jóval gyakrabban fordulnak elő.

Az *1. ábra* jobb oldali képén az empirikus hisztogram és annak maximum likelihood alapú (az idősorból kimért várható értékű és szórású) normális illesztése látható. A sűrűségfüggvény *(Probability Density Function, PDF)* egy konkrét x értékre azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel fog egy x nagyságú ingadozás realizálódni.[3] A továbbiakban a valószínűség-sűrűségfüggvény szinonimájaként fogjuk használni a hisztogram szót, ami tulajdonképpen a sűrűségfüggvény empirikus változatát takarja. A hisztogramra mint a relatív gyakorisági görbére kell gondolni, azaz azt mondja meg, hogy egy adott x logaritmikus hozamérték kis környezetében az összes múltbeli megfigyelésünk hány százaléka tartózkodott. Az *1. ábra* jobb oldali részének tanulsága: a normális eloszlás „túl lapos” és „túl vékony szárnyú”, azaz alulbecsli a „kicsi” és „nagy” ingadozások valószínűségét.

A modern pénzügytan egyik alapfeltevése a hatékony piac hipotézise. Ez a tétel azt állítja, hogy az egymást követő árfolyam-ingadozások autokorrelálatlanok, mivel minden releváns információ beépül az árba, így az csak akkor változhat meg, ha egy definíció szerint előrejelezhetetlen, új információ érkezik. A hatékonyság, illetve még általánosabban az árinnovációk függetlensége nagyon egyszerűen tesztelhető statisztikai úton. Ha ugyanis az árfolyam-ingadozások függetlenek, akkor a múltban egymást adott időtávval követő napi hozamok között nem lehetne szignifikáns korrelációt kimutatni. Ez az autokorrelálatlansági követelmény normális eloszlású hozamok esetén a függetlenséget jelentené. Mint láttuk, a hozamok nem normális eloszlású valószínűségi változók, ezért a függetlenséghez itt általánosabban elméletileg azt kell megkövetelni, hogy a hozamok tetszőleges transzformáltjai is autokorrelálatlanok legyenek (például a hozamok abszolút értékei, négyzetei stb. is korrelálatlanok).

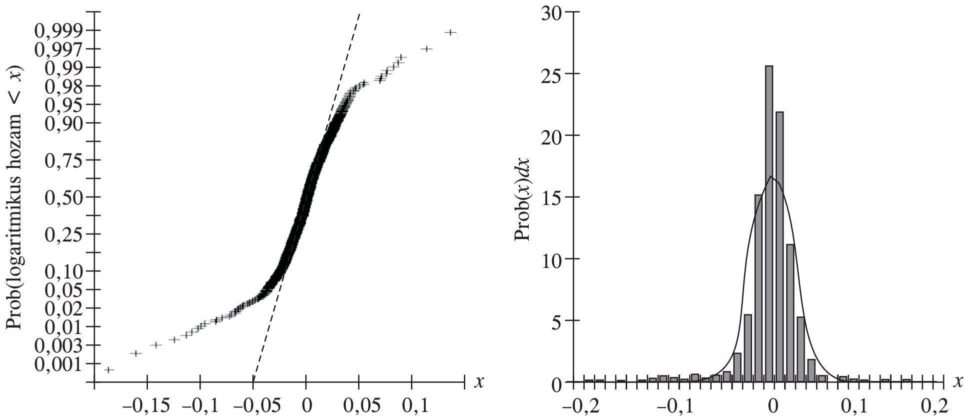
[2] Az x-en ezentúl a szokásos logaritmikus napi hozamot kell érteni, azaz ha $S(t)$ a t napi záróár, akkor első lépésben kiszűrjük az exponenciális trendet: $P(t) = \ln[S(t)] - \{\ln[S(0)] + \mu t\}$, majd ennek az idősornak vesszük a differenciáját: $x(t)=P(t+1)-P(t)$.

[3] Pontosabban: ha a sűrűségfüggvény x helyen $f(x)$, akkor az x és $x + dx$ közötti tartományban egy árfolyam-fluktuáció $f(x)dx$ valószínűséggel fog kialakulni.

1. ábra

A napi BUX-ingadozás eltérése a gaussi leírástól

CDF Gauss-papíron *A logaritmikus áringadozások hisztogramja és Gauss-illesztés*



Vizsgálataink szerint a lineáris autokorrelálatlanság 95 százalékos biztonsággal állítható ugyan, de az abszolút, illetve a négyzetes hozamidősor szignifikánsan autokorrelált. Ez az úgynevezett volatilitásklasztereződés vagy másképpen fogalmazva az időben összefüggő varianciák jelensége a pénzügyekben közismert tény, sikeres elméleti modelljeit már majd húsz éve megadták az ARCH-, majd később a GARCH-modellek, illetve ezek további finomított változatai. Az autokorreláció a következőt jelenti: abból, hogy egy adott napon az árfolyam-ingadozás nagy volt a piacon, 50 százaléknál nagyobb biztonsággal következtethetünk arra, hogy a következő napokban, sőt méréseink szerint még három héttel később is az átlagosnál nagyobb ingadozásokat fogunk megfigyelni. Az ingadozások előjelére azonban semmit sem tudunk mondani (azaz nem tudjuk, hogy az árak esni vagy emelkedni fognak).

Érdekesség, hogy a volatilitás autokorrelációs függvényében egy „második csúcs” figyelhető meg két és három hét között. Ez valami olyasmit jelent, hogy egy nagy esemény hatása lassan elhal, de két-három héttel az esemény után még egyszer erőteljesebben megrázza a piacot (ez valamiféle késői korrekciós effektus). Az időben változó piaci volatilitás kockázatkezelési szempontból nagyon fontos lehet, hiszen egy múltban mért konstans szórás jövőre vonatkoztatását semmiféle meggyőző érvvel nem lehet alátámasztani.

A piaci kockázatkezelés benchmarkja (*J. P. Morgan* [1996]) szerint a piac a múlt alapján jelzi előre a volatilitást és a hozamot, de a piac nem emlékezik azonos súllyal a múltbeli eseményekre, hanem exponenciálisan elhal a memóriája *(Exponentially Weighted Moving Average, EWMA)*. A felejtés ütemét a *RiskMetricsben* úgy állították be (optimalizálták), hogy 75 napnál régebbi megfigyelések már csak 1 százaléknál kisebb súllyal szerepeltetnek az átlag- és szórásszámítási képletekben. A memóriacsillapítási faktor 0,94-nek adódott, azaz egyik napról visszalépve egy eggyel korábbi napra, a megfigyelés súlya 6 százalékkal csökken. A csillapításos módszer legnagyobb előnye az, hogy ennek alapján előrejelzést lehet tenni a következő napok szórására. Az előrejelzés később összehasonlítható a tényleges volatilitásértékkel. A múltbeli EWMA-becslés és tényleges volatilitások közötti eltérések négyzetösszegét minimalizálva a BUX-hozamok esetére

0,9-es csillapítási tényezőt kaptunk, ami rövidebb, 45 napos memóriát implikál. Megjegyeznénk, hogy az EWMA-módszer valójában egy speciális integrált GRACH-modellt jelent. Vizsgálataink szerint a BUX-áringadozások jól modellezhetők IGARCH varianciájú standard normális növekményekkel (azaz a J. P. Morgan-féle *RiskMetrics*-egyenletek kis módosításokkal jó modellt adnak), de ezen elemzés részleteinek bemutatására itt most nincs lehetőségünk.

A skálázási problémáról kell még beszélnünk, aminek lényege az, hogy a különböző időtávokon vizsgált árfolyam-ingadozások statisztikája miképpen kapcsolható össze. Gauss-eloszlású napi hozamok esetében közismert tény, hogy a T nap alatti ingadozás is normális eloszlású lesz, csak várható értéke és varianciája (szórásnégyzete) nő T-szeresére. Ez azt jelenti, hogy ha az eredeti árfolyamokból különböző időtávokon vett ingadozásokat képzünk, akkor a különböző időtávú hozamok szórása az idő gyökével arányosan növekszik.

A szórás mellett a kurtózis egy további eloszlásjellemző lehet. Ez a mutató az eloszlás csúcsosságát méri, Gauss-esetben az értéke: 3. A normálisnál leptokurtikusabb eloszlásokra ez az érték 3-nál nagyobb. A kurtózis (3-tól mért eltérése) független hozamok esetében $1/T$ szerint csökken, de a volatilitásklaszterezõdési effektus miatt ez a lecsengés lassabb lehet. A különböző T-k melletti eloszlásokból származtatható kumulánsokon túl a sűrűségfüggvények között is megállapítható kapcsolat, vagy más szóval, egymásba skálázhatók. Egyszerű formulákat az úgynevezett stabil eloszlások esetében kapunk.[4] Speciálisan stabil eloszlás a normális eloszlás is, illetve általában a Lévy-eloszlások. Eredményeink alapján a Gauss-eloszlástól eltérő, de skálázható sűrűség- és eloszlásfüggvények már egyértelműen jelzik a továbblépés irányát: Lévy-eloszlást kell megpróbálni illeszteni.

A Lévy-integrálok numerikus meghatározása

Az előző fejezet tanulságaként világos, hogy a normális eloszlás helyett új típusú időfüggetlen paraméteres eloszlással kell kísérletezni a hozamok valószínűségi leírásához. Első lépésben a gyakran javasolt Lévy-modellt (*Mantegna* [1994], *Bouchaud–Potters–Cont* [1998], *Mantegna–Stanley* [2000], *Mandelbrot* [1963]) kezdtük el tesztelni. Ebben a tanulmányban nem célunk a Lévy-eloszlások technikai-matematikai részleteiben való elmélyedés, mert erről rendszeres elemzések olvashatók a hivatkozott cikkekben. Itt csupán a szemléletes megvilágításukra törekedhetünk. Egyszerűen fogalmazva: a szimmetrikus Lévy-eloszlás két paraméterrel írható le (a normális eloszláshoz hasonlóan): az α farokexponenssel és a γ skálaexponenssel. A fontosabb jellemző az α, mivel ez írja le a „veszélyes” árfolyam-fluktuációk természetét, nevezetesen azt, hogy a hatványfüggvény-jellegű lecsengés hatására milyen ütemben csökken a „nagy” ingadozások kialakulásának valószínűsége.[5]

[4] Ha $P_1(x)$ a napi logaritmikus hozamok sűrűségfüggvénye, akkor stabil eloszlásoknál $P_T(x) = \frac{1}{T^{\frac{1}{\alpha}}} P_1\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ lesz a T napos logaritmikus hozam sűrűségfüggvénye, azaz a vízszintes és a függőleges tengelyek megfelelő átskálázásával P_1 és P_T ugyanarra a görbére ejthető össze. Ez a gondolat egyértelműen a statisztikus fizika kritikus jelenségekkel foglalkozó területéről jött át. Gauss-esetben $\alpha = 2$, Lévy-esetben $0 < \alpha < 2$.

[5] A nagy x árfolyamesések és -emelkedések kialakulásának valószínűsége a következő szimmetrikus módon alakul: $\mathrm{Prob}(|x|) = A|x|^{-(1+\alpha)}$, ha $|x| \to \infty$, ahol A egy α-tól és γ-tól függő konstans.

A Gauss-eloszlásnál (mely egy speciális Lévy-eloszlásként is felfogható) az exponens értéke 2, vastagabb farok jelenlétében az exponens 0 és 2 között lesz, és minél kisebb, annál lassabban cseng le az eloszlás farka, azaz annál nagyobb eséllyel fordulnak elő nagy fluktuációk. A Lévy-eloszlások illesztésénél a legnagyobb gyakorlati probléma az, hogy az elméleti sűrűségfüggvényt nem lehet megadni egyszerű analitikus (képlettel kiírható) formában, zárt alakban csak a Fourier-transzformáltja, azaz a karakterisztikus függvény írható fel.[6] Ennek okára a valószínűségszámítás ad magyarázatot, de itt ezt most felesleges részletezni (például lásd *Feller* [1968], csak utalásszerűen: valószínűségi változók összegének eloszlása az eloszlások konvolúciója, ami a Fourier-térben a karakterisztikus függvények produktuma; a mi esetünkben pedig a T-napos logaritmikus hozam mint valószínűségi változó T darab egynapos logaritmikus hozam összegeként áll elő). A legkisebb négyzetek módszerével előállított Lévy-illesztés eredményeként $\alpha=1,38$, $\gamma=0,0018$ adódott. 95 százalékos biztonsággal állíthatjuk, hogy a legkisebb négyzetek módszerével megállapított Lévy-exponens ebben a vizsgált időszakban 1,23 és 1,54 közé került. Ez az eredmény összhangban van más szerzők (*Mantegna–Stanley* [2000], *Matacz* [2000]) más idősorokon mért eredményeivel.

Mivel a legkisebb négyzetek módszerén alapuló illesztési eljárás numerikus integrálok ezreinek kiszámításán alapul, ezért túl lassú, így gyakorlati okokból az integrálok gyorsabb meghatározási módszerére volt szükségünk. Természetesen adódott az ötlet, hogy a Fourier-integrál meghatározására a diszkrét Fourier-transzformációt (*DFT,* illetve gyorsított változatát, a *Fast Fourier Transform, FFT*) használjuk fel. Pontosabban, a mért empirikus sűrűségfüggvényünket gyorsan és egyszerűen a frekvenciaspektrumba lehet transzformálni, és itt az analitikus Lévy-függvényalak a legkisebb négyzetek módszerével kényelmesen illeszthető. A gyorsított módszer alapján nyert transzformált empirikus sűrűségfüggvény vízszintes és függőleges értékei közvetlenül azonban nem esnek egybe a helyes frekvencia és a meghatározandó numerikus integrál közelítő értékével, hanem „trükkös" átskálázásokra és interpolációs módszerek alkalmazására van még szükség. E részletek közlése azonban semmiképpen sem lehet ennek a tanulmánynak az anyaga, hanem csak hivatkozunk egy remek forrásra: *Numerical Recipes...* [1986–1992]. Ezzel a megközelítéssel hihetetlenül felgyorsult illesztési módszert sikerült kidolgoznunk: 50 percről 0,5 másodpercre csökkent le a MATLAB-os számítási idő. Ez a fejlemény lehetővé teszi, hogy egy későbbi fejezetben az illesztést dinamikus változatban is bemutathassuk. A teljes illesztési eljárás eredményeiből világosan kitűnt, hogy a Gauss-modellhez képest az illesztés minősége szignifikánsan javult, ugyanakkor egy új probléma jelentkezett: a Lévy-eloszlás farka „túl vastag", azaz a „nagy" ingadozások valószínűségét ez a modell túlbecsüli. E probléma kezelésével foglalkozunk a következő részben.

A csonkolt Lévy-eloszlás illesztési problémája

Először *Koponen* [1995] dolgozott ki egy analitikusan is kezelhető speciális, úgynevezett exponenciális csonkolási eljárást. Elméletileg ugyanezt a módszert alkalmazta *Mantegna* [1994] is, amikor a csonkolt Lévy-eloszlású hozamok numerikus szimulációjára ismertetett egy meglehetősen gyors algoritmust. A csonkolás fő célja tehát az a természetes követelmény, hogy a hozamok szórása és egyéb momentumai végesek legyenek. A *Koponen* [1995]-féle exponenciális csonkolás lényege az, hogy a hozamok hisztogramjának

[6] A szimmetrikus Lévy-eloszlás így írható fel Fourier-integrál alakban: $P_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha}\cos(qx)dq$, ahol $P_1(x)$ az egynapos logaritmikus hozam sűrűségfüggvénye.

központi részén továbbra is kvázi-Lévy-típusú marad az illesztett függvény, de egy bizonyos tartományon kívül a hatványfüggvényszerű lecsengésre egy exponenciális gyorsítás rakódik.[7] Az exponenciális modell egyik legnagyobb előnye abban áll, hogy a Lévy-eloszláshoz hasonlóan a Fourier-térben analitikus formában adható meg.[8] Ez különösen az illesztés sebességénél és az opciós matematika kidolgozásában lesz majd fontos. Mivel a karakterisztikus függvény képletét tehát ismerjük, ezért az előző fejezetben elmondottakhoz hasonlóan itt is kínálkozik a lehetőség, hogy az empirikus sűrűségfüggvény pontjait a gyorsított Fourier-transzformációnak (FFT-nek) alávetve az illesztést a Fourier-térben kényelmesen elvégezhessük. Erre a kérdésre hamarosan még visszatérünk, előbb azonban célszerű a csonkolt Lévy-eloszlás kvalitatív jellemzését megadni.

A csonkolt Lévy-eloszlásnak három paramétere van, a Lévy-modellből ismert α és γ, valamint az új λ csonkolási paraméter. A csonkolási paraméter nagyon egyszerű felfogásban azt jelenti, hogy a levágás érezhetően a λ^{-1} tartományon kívüli hozamoknál jelentkezik. Egy másik interpretáció szerint a λ nagyon szoros kapcsolatban áll az úgynevezett t_C átváltási időponttal. Mivel tudjuk, hogy a csonkolt Lévy-eloszlású modell véges szórású hozamokat implikál, így a centrális határeloszlás tétele szerint, ha elég hosszú T időtávokon vizsgáljuk a logaritmikus hozamokat, azaz elég sok független csonkolt Lévy-eloszlású hozamot adunk össze, akkor az összeg eloszlása közel normális lesz. A csonkolási paraméterrel mennyiségileg jellemezhetjük azt, hogy mit is értünk elég hosszú időhorizonton. Egyszerű megfontolások alapján megállapítható, hogy a t_C „eloszlásváltó” idő arányos a $\lambda^{-\alpha}$-val (ezen az időtávon válik azonos nagyságrendűvé a szórás és a levágási hozam). Összefoglalva tehát a paraméterek szemléletes jelentését: α a farok vastagságát, γ a hozamtartomány méretét, λ pedig a csonkolt Lévy-eloszlású és a Gauss-tartományokat elválasztó időskálát adja meg.

Ezután térjünk vissza a csonkolt Lévy-eloszlás illesztési feladatára! Egy háromparaméteres nemlineáris függvény illesztési feladata általában nem triviális numerikus feladat. Jelen esetben a λ csonkolási paraméter legkisebb négyzetek módszerével történő meghatározása különösen kritikus, mert becslését lényegében a néhány szélsőséges megfigyelés határozza meg, ezért a becslés várható hibája különösen nagy, a becsült csonkolási paraméter értéke erősen függ az iteráció induló értékétől. Emiatt nyilvánvaló, hogy a λ meghatározását elkülönülten kell kezelni a másik két paraméter illesztésétől.

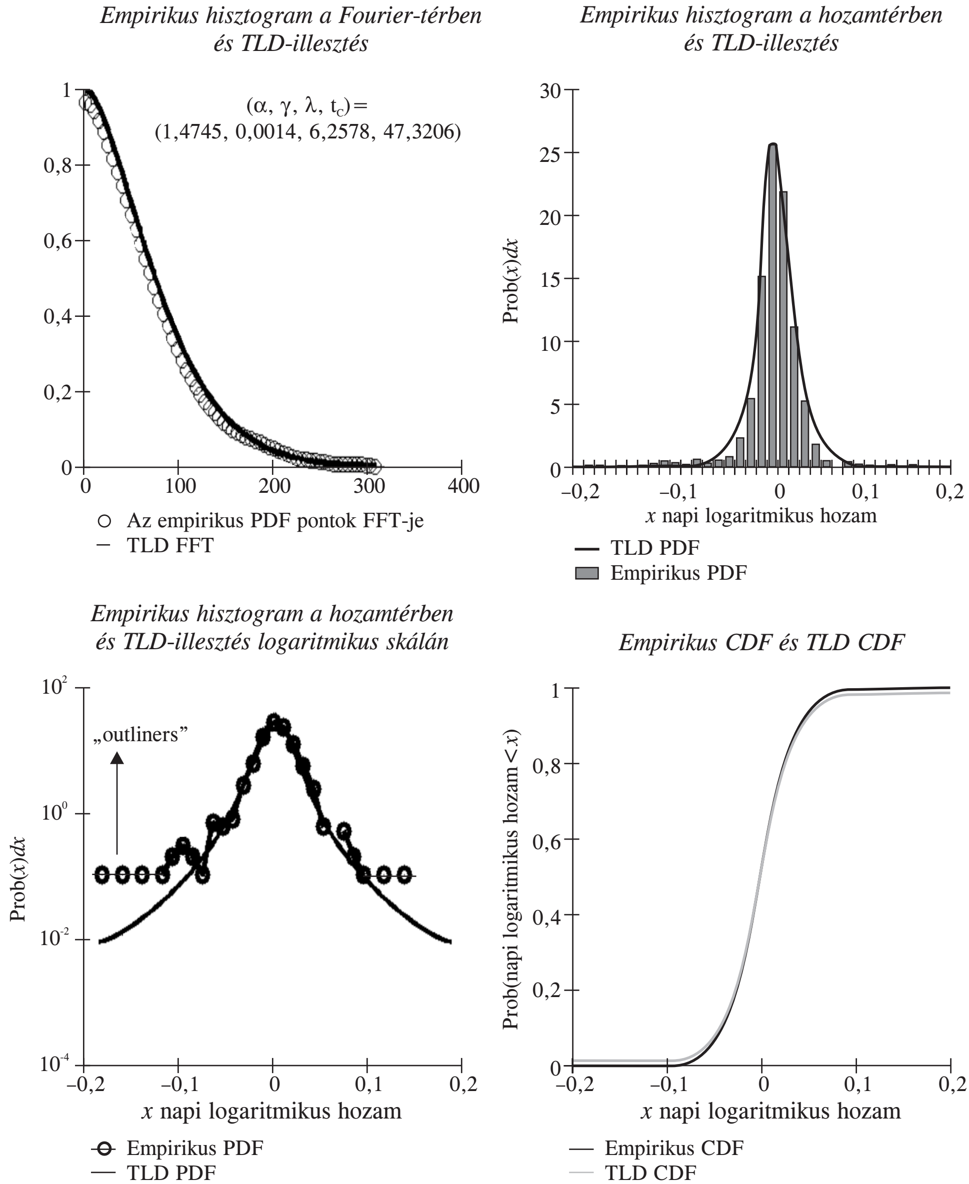
Matacz [2000] egy jól működő, elméleti megállapításokon alapuló illesztési eljárást javasol: először végezzünk el egy egyszerű Lévy-illesztést, majd a csonkolási paramétert egy elvi összefüggés alapján határozzuk meg. Arról van ugyanis szó, hogy a csonkolt Lévy-eloszlású hozamok szórása (és egyéb momentumai is) kifejezhetők a csonkolt Lévy-paraméterek függvényében, tehát α, γ és az adott időtávon mért σ szórás alapján a csonkolási exponens egyértelműen kiszámítható.[9] Ezzel elkerülhetjük a λ

[7] A nagy x árfolyamesések és -emelkedések kialakulásának valószínűsége a Lévy-eloszláshoz hasonlóan szimmetrikus módon alakul: $\mathrm{Prob}(|x|) = A|x|^{-(1+\alpha)}e^{-\lambda|x|}$ ha $|x| \to \infty$ (ahol A a paraméterektől függő konstans), de láthatóan megjelenik egy csonkolási paramétertől függő gyorsító faktor is. A $\lambda=0$ esetben a csonkolt modell visszaadja az egyszerű Lévy-modellt.

[8] $P_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left\langle -\frac{\gamma}{\cos(\pi\alpha/2)}\left\{(q^2+\lambda^2)^{\frac{\alpha}{2}}\cos[\arctan(q/\lambda)] - \lambda^\alpha\right\}\right\rangle \cos(qx)dq$, ahol $P_1(x)$ az egynapos logaritmikus hozam sűrűségfüggvénye.

[9] λ-t a $\sigma^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\cos(\pi\alpha/2)}\gamma\lambda^{\alpha-2}$ összefüggés alapján határoztuk meg. Itt megjegyezzük, hogy egy empirikus likelihood-függvény-maximalizáción alapuló paraméterillesztési eljárás is elképzelhető lett volna, de mi most gyorsasága miatt a fent vázolt másik módszert alkalmaztuk.

2. ábra
A csonkolt Lévy-eloszlás illesztési eljárása



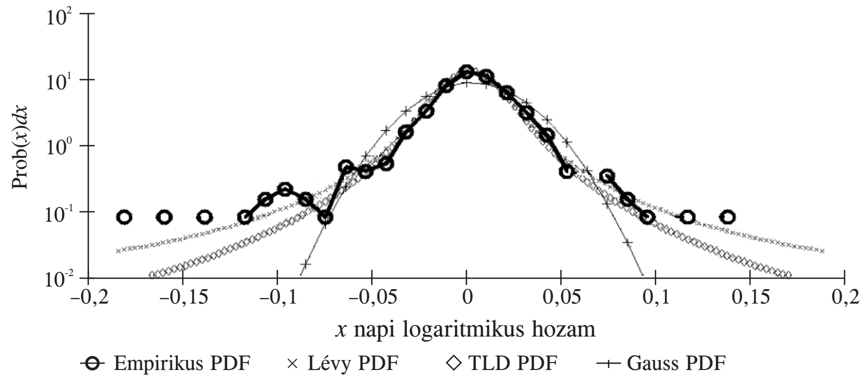
instabil, illesztéses módszerű meghatározását. A csonkolt Lévy-illesztési eljárás főbb lépéseit a *2. ábrán* mutatjuk be. A normális Lévy- és a csonkolt Lévy-modellek közötti különbségeket a *3. ábrán* illusztráljuk.

A csonkolás lényege világosan leolvasható: a csonkolt Lévy-eloszlás felgyorsult ütemben kezd el csökkenni a nem csonkolt központi tartományon kívül. A *3. ábra* felső részével kapcsolatban még egy megjegyzést kell tennünk. Jól láthatóan a sűrűségfüggvény távoli szárnyain néhány nem illeszkedő empirikus pont figyelhető meg. Ennek

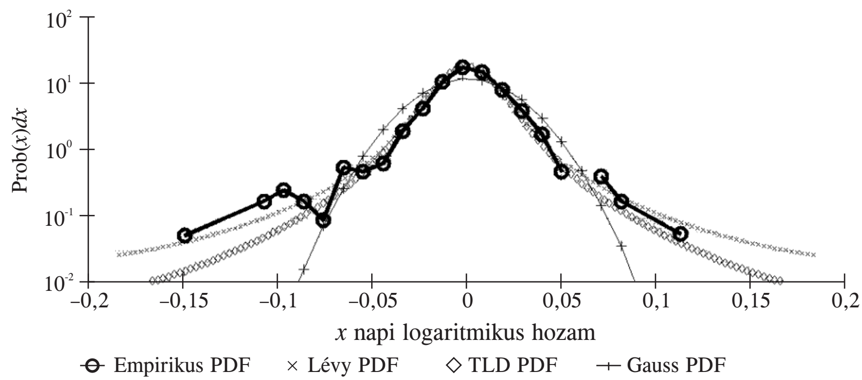
3. ábra

A normális és a csonkolt Lévy-modellek közötti különbségek

Empirikus hisztogram, Gauss-, Lévy- és TLD-illesztés logaritmikus skálán



Korrigált empirikus hisztogram, Gauss- Lévy- és TLD-illesztés logaritmikus skálán



Megjegyzés: a csonkolási eljárás a szárnyak gyorsabb lecsengését biztosítja, aminek hatására a szórás véges marad. A 4–5σ tartományban a Lévy-, illetve csonkolt Lévy-eloszlás jól leírja a sűrűségfüggvényt, ugyanakkor néhány *kieső* pont figyelhető meg a távoli szárnyakon, amelyek előfordulását leginkább technikai effektusnak lehet felfogni. Az alsó ábrán már a korrigált farokeffektust mutatjuk be.

oka kettős lehet: egyfelől technikai, mivel a szárnyakon mért kevés megfigyelés miatt az előforduló nullaértékű hisztogrampontok (vannak olyan kis intervallumok, „binek” ahol árfolyam-fluktuációt a múltban nem tapasztaltunk) ábrázolása logaritmikus skálán lehetetlen [mivel log(0) = $-\infty$], másik lehetőség, hogy a „nagyon szélső” pontok nagy valószínűséggel már olyan extremális eseményeket jeleznek, amelyek túlfeszítik a csonkolt Lévy-modell kereteit is. Hangsúlyozzuk, hogy a *kieső* pontok jelentősége kockázatkezelési szempontból egyáltalában nem elhanyagolható, kezelésükre további vizsgálatokat érdemes végezni.

A kérdés eldöntéséhez a *3. ábra* alsó részén látható empirikus farokpontokat mind a jobb, mind a bal oldalon egyetlen hisztogramponttá alakítottuk úgy, hogy a megfigyeléseket egy-egy intervallumközéphez rendeltük hozzá. A korrigálás után azt tapasztaltuk, hogy a farokpontok szebben illeszkednek a Lévy-függvényekhez.

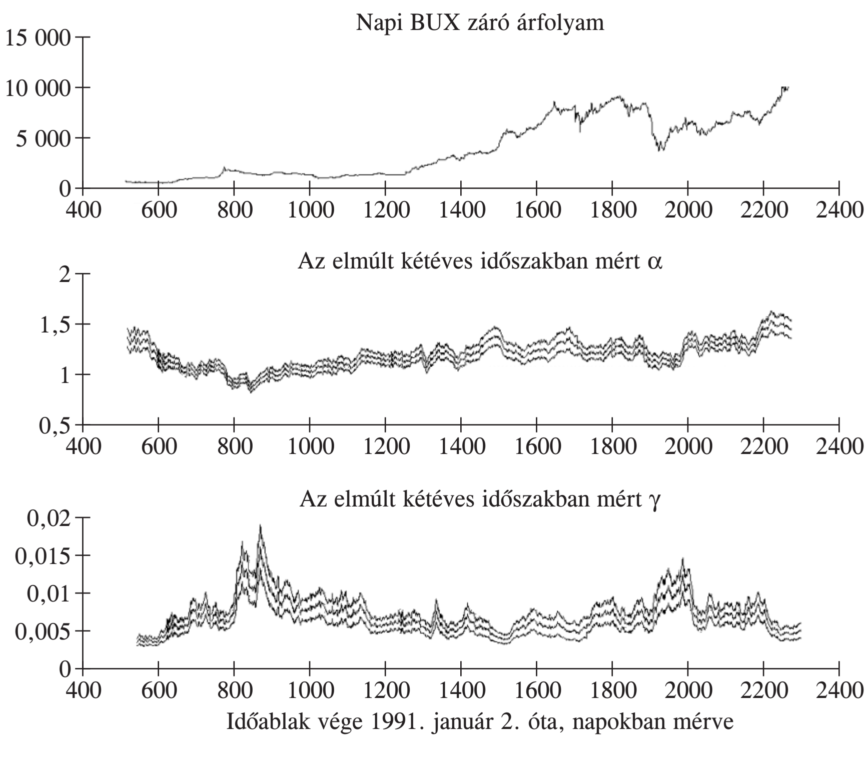
Összefoglalásképp elmondható, hogy sikerült egy gyors algoritmust találnunk, amellyel a mért hozamhisztogramok csonkolt Lévy-modelljét specifikálhatjuk. Ezt egy dinamikus csonkolt Lévy-elemzésre fogjuk felhasználni, amit a következő paragrafusban részletezünk. Megjegyezzük, hogy a csonkolt Lévy-illesztés ilyen adatsűrűség mellett nem vezetett a Lévy-eloszlásnál jobb illeszkedéshez (az illesztés hibáját a Fourier-térbeli hisztogram és elméleti modell értékek közötti eltérések négyzetösszegeként definiáltuk, és a csonkolás hatására 0,005-ről 0,03-ra nőtt az értéke), de matematikailag értelmesebb véges szórású hozamok modellezését teszi lehetővé.

A csonkolt Lévy-paraméterek, azaz a tőzsde időbeli fejlődésének vizsgálata

Az előző részben vázolt illesztési algoritmusunk elegendően gyors (egy teljes csonkolt Lévy-eloszlás specifikációja 1-2 másodperc alatt lezajlik), így lehetővé teszi, hogy megvizsgáljuk a paraméterek mennyire alakultak stabilan a múltban. Pontosan fogalmazva: 1991. január 2-ától kezdve egy kétéves (500 kereskedési napos) mozgó időablakot húztunk végig a BUX-idősoron, és ebben a mozgó ablakban végeztük el a csonkolt Lévy-paraméterek specifikációját. Hasonló elemzés olvasható *Palágyi–Mantegna* [1999] cikkében is, de ott sima (csonkolatlan) Lévy-specifikáció történt, és csak negyedéves frekvenciával vizsgálták az exponenseket. Mi több mint 1500 múltbeli időpontra határoztuk meg az időpontot

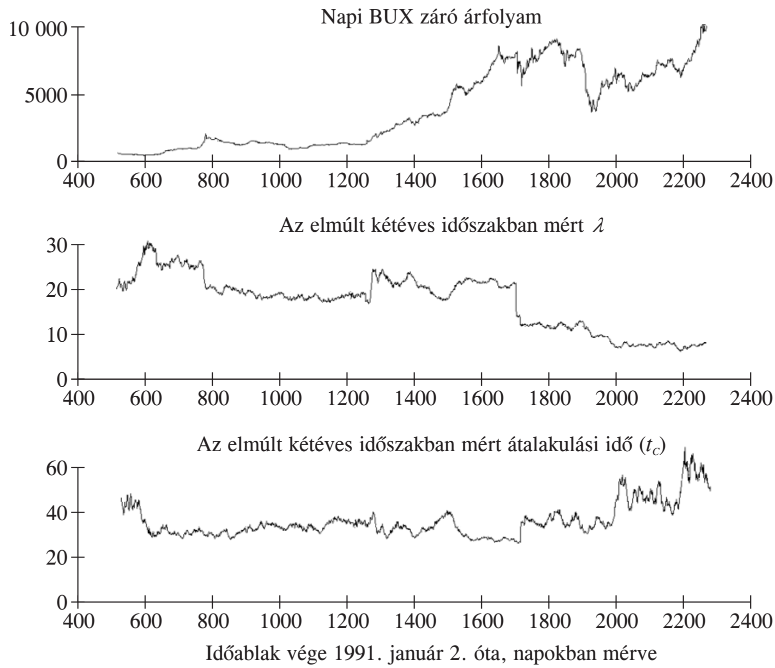
4. ábra

Csonkolt Lévy-paraméterek (α és γ)



Megjegyzés: az α és a γ paraméterek időbeli fejlődése jól tükrözi a piac fejlődési folyamatát. A Fourier-térben legkisebb négyzetek módszerével illesztett eloszlás paraméterbecslésére 95 százalékos konfidencia-intervallumot számítottunk.

5. ábra
A λ csonkolási paraméter és az átváltási idő



Megjegyzés: a λ és a t_c átváltási idő historikus fejlődése tükrözi a piac érési folyamatát.

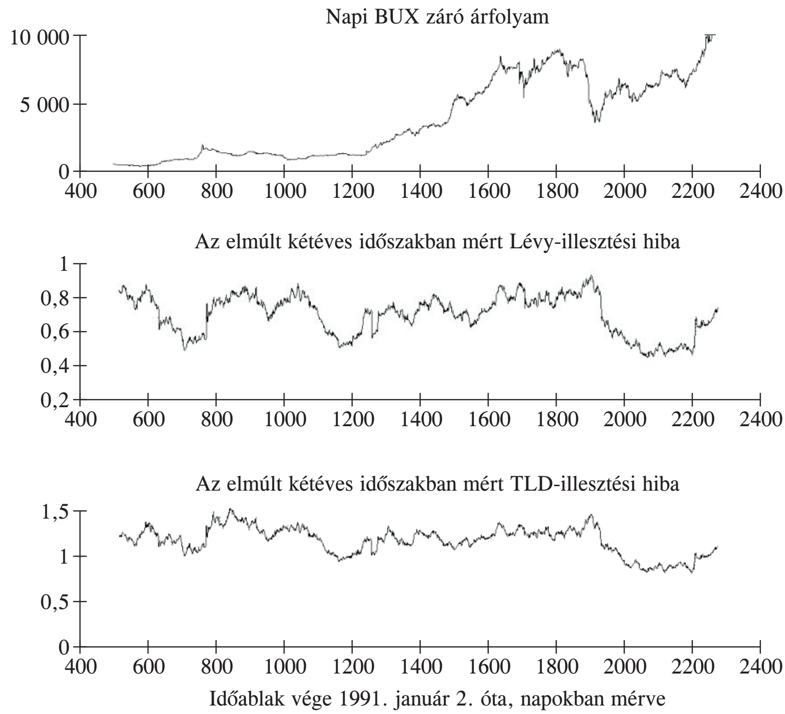
megelőző két év árfolyam-ingadozásainak α, γ és λ paramétereit, valamint a pontbecslések mellé a paraméterértékek 95 százalékos konfidenciaintervallumát.

A *4.* és az *5.* ábra szépen illusztrálja, hogy adott szignifikanciaszint mellett a csonkolt Lévy-paraméterek pontosan detektálják a piac állapotát. Ideges időszakokban (ázsiai, orosz válság, választások stb.) α rendszerint lecsökken, azaz a nagy ingadozások valószínűsége lassabban cseng le, γ megnő, azaz a lehetséges ingadozástartomány kiszélesedik és λ esik, mivel ennek hatására a t_c megnő, azaz a csonkolt Lévy-eloszlás hosszabb távon marad releváns modell (lassabb lesz a normális eloszláshoz való konvergencia).

A mozgó időablakban mért illesztési hibákat a *6. ábrán* mutatjuk be. Itt az illesztési hibát a Fourier-térbe transzformált empirikus hisztogramértékek és az illesztett Fourier-transzformált Lévy-valószínűségek közötti eltérések négyzetösszegével értelmeztük. Látható, hogy a csonkolás kissé megnövelte az illesztési hibát, hiszen egy már optimálisan illesztett Lévy-eloszlást „torzítottunk el”, de az elért véges szórás gyakorlatilag realisztikusabbá teszi a megközelítésünket. A Lévy-exponensek idősorában tisztán kivehető trendek a piac statisztikai értelemben vett fejlődését tükrözik (hasonló következtetésre jutott *Palágyi-Mantegna* [1999] a negyedéves frekvenciájú vizsgálataiban). Az időfüggő Lévy-paraméterek idősorában megfigyelhető szignifikáns strukturális törések megmagyarázzák a teljes mintára vett Lévy-illesztés kieső pontjait, illetve jelzik a csonkolt Lévy-eloszlás alapján készíthető variancia-előrejelzések nem 100 százalékos megbízhatóságát. A Lévy-paraméterek időbeli alakulására egy esetleges dinamikai modell felállítása érdekes vizsgálat lehetne (például IGARCH-generált farokexponens).

6. ábra

A kétéves mozgó időablakban mért csonkolt Lévy-illesztési hiba időfejlődése



A csonkolt Lévy-eloszlású modell alkalmazása

Matacz [2000] kidolgozta az opcióárazási feladat megoldását geometriai csonkolt Lévy-eloszlású mögöttes folyamatokra *(Truncated Levy Process, TLP)*. A következőkben mi is ezt fogjuk megvalósítani. A geometriai csonkolt Lévy-folyamat olyan sztochasztikus folyamat, ahol az árfolyam aktuális értékével arányosan, trendszerűen és csonkolt Lévy-eloszlású fluktuációk alapján változik. Matacz elméletének lényege az, hogy a kiíró *fair* árazási elv szerint határozza meg az opciós prémiumot (azaz várható értékben a lejáratkori vagyona nem különbözik az induló vagyonától), és olyan hedgelési stratégiát választ, amellyel lejáratkori vagyoni helyzetének varianciáját minimalizálni tudja. Speciális geometriai Brown-mozgásos árfolyamok esetben e fenti elv precízen a *Black–Scholes* [1973] képleteket adja vissza (a Brown-mozgás egy speciális csonkolt Lévy-eloszlású folyamat, ahol $\lambda = 0$ és $\alpha = 2$, de erre később még visszatérünk).

Black és Scholes szerint az árfolyamot sorozatos elemi tranzakciók alakítják, ahol is az elemi tranzakciókban az ár csak egy adott egységgel (árlépésközzel) változhat meg adott valószínűség mellett. Az egymást követő sok tranzakció hatására az árváltozás binomiális eloszlású lesz, ami a tranzakciók nagy száma mellett jól közelíthető határeloszlásként normális eloszlással. A gyakorlatban az árak helyett a folytonosan számolt hozamokkal (azaz a logaritmikus differenciákkal) dolgozunk, ezért veszik az árfolyam mint valószínűségi változó logaritmusát. A hatékonyságra hivatkozva állítják végül, hogy az egymást követő logaritmikus hozamok sorozata véletlen bolyongással modellezhető. A Black–Scholes-modell állandó szórású Brown-mozgást feltételez, de ez könnyen általánosítható a realisztikusabb időben változó varianciájú ARCH–GARCH-modellek irányába.

Mi most időben állandó paraméterekkel rendelkező, azaz időfüggetlennek feltételezett, de vastag farkú, csonkolt Lévy-eloszlású bolyongásos modell mellett mutatjuk be a feladat megoldását. A Brown-mozgáshoz hasonlóan a Lévy-eloszlású hozamok elméleti alátámasztására is fel lehet és fel is állítottak modelleket.[10] Ezen mikromodellek és a matematikai részletek mellőzésével itt csak azt emeljük ki, hogy csonkolt Lévy-eloszlású növekményeket feltételezve a levezetések eredményéül egy improprius integrál alakjában megadott opcióárazási formula adódik,[11] amely természetesen a csonkolt Lévy-eloszlás paramétereitől függ. Most hangsúlyoznunk kell, hogy a csonkolt Lévy-eloszlású modell csak a t_C átváltási időn belül releváns modell, tehát azon túl első közelítésben a Black–Scholes-modell megfelelő lehet. Tipikusan t_C 20 és 40 nap körül alakul (lásd *5. ábra*), tehát az egy-két kereskedési hónapon belül lejáró opciókra már mindenképpen a csonkolt Lévy-eloszlás modellen alapuló képletet célszerű alkalmazni. Az egy-két hónap körüli átváltási idő összhangban van más szerzők eredményeivel is (*Mantegna-Stanley* [2000], *Matacz* [2000], *Kullmann–Töyli–Kertész–Kanto–Kaski* [1999]), bár Magyarországon érthető okokból (piacunk kevésbé fejlett, mint például az Egyesült Államok tőzsdéi) egy kicsit magasabbak a mért értékek.

A feladatunk tehát a csonkolt Lévy-eloszlású régióban az opcióárazási formula numerikus meghatározása. Közelítésként alkalmazni szokták az úgynevezett kurtóziskorrekciót,[12] aminek lényege az, hogy a hagyományos Black–Scholes-formulába a vastag farkat mérő kurtózissal módosított volatilitást helyettesítik be. Ez a modell a mi numerikus formulánk első közelítésének tekinthető, ami lényegi effektusként a *volatility-smile* jelenséget képes leírni. Ez a jelenség abban áll, hogy egy elméleti azonnali lehívás esetén nyereséges (*ITM, in-the-money*), illetve veszteséges (*OTM, out-of-the-money*) árfolyamtartományban a piaci opcióárak magasabbak a hagyományos Gauss-alapú Black–Scholes-képlethez képest. Ez teljesen érthető is, hiszen a valóságban a nagy események nem gaussi frekvenciával következnek be, tehát a spot árfolyamtól távoli kötési árfolyamú opciók értékessé válhatnak. Ugyanakkor az alaptermék azonnali árfolyamával megegyező kötési árfolyamú (*ATM, at-the-money*) opciók esetén a Black–Scholes-opcióár túl magas a nem túl gyakori „kis” ingadozások miatt.

Ebben a részben különböző futamidejű BUX *call* opciók árazását mutatjuk be. A futamidőket nyilvánvalóan úgy választottuk meg, hogy a csonkolt Lévy-eloszlású régióban legyünk. Az opcióárakat az utolsó 1000 napi záró BUX-adat alapján meghatározott csonkolt Lévy-eloszlás paraméterek mellett, MATLAB-ban elvégzett numerikus integrálás eredményeként állítottuk elő. A paraméterértékeket a *7. ábrán* tüntettük fel. Tesztjeink alapján speciális esetben[13] a numerikus integrálás eredményeként visszakapjuk a Black–Scholes-formulát. Csonkolt Lévy-eloszlású esetben 1 nap és 1 hónapos lejárati idők mellett a *7–10. ábrákon* hasonlítjuk össze a Black–Scholes-formula eredményeit a realisztikusabb opcióárazási eredményekkel.

[10] Ezen mikroszkopikus piaci modellekről részletesen olvashatunk például a *Lux* [1998]-ban.

[11] $C(S,K,t,\alpha,\gamma,\sigma,r) = S - \frac{1}{2}Ke^{-rt} + \frac{Ke^{-rt}}{\pi}\int_0^\infty dq\hat{P}(q,\alpha,\gamma,\lambda)\left(\frac{\sin qx - q\cos qx}{q(1+q^2)}\right)$, ahol $\hat{P}$ a csonkolt Lévy-eloszlás karakterisztikus függvénye és $x = \ln(K/S) - rt + \frac{1}{2}\sigma^2 t$. S a spot árfolyam, C a call opció ára, K a kötési árfolyama és t a lejáratig hátralévő idő, r pedig a kamatláb.

[12] Ennek részleteiről például a *Bouchaud–Potters–Cont* [1998] cikkben olvashatunk.

[13] Ekkor $\lambda=0$, azaz nincs csonkolás, $\alpha=2$, azaz a Gauss-határesetben vagyunk, és $\gamma = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^\alpha$ a gaussi skála-exponens.

Megjegyezzük, hogy opcióárazási formulánk alapján egyszerűen levezethető egy optimális dinamikus hedgelési stratégia is. Ennek részleteire most nem térünk ki, hanem egy más típusú kockázatkezelési problémát tárgyalunk még meg. Nevezetesen azt, hogy miként lehet meghatározni az opció adott idő alatt adott valószínűség mellett bekövetkező értékváltozását. Nyilvánvaló, hogy itt tulajdonképpen egy kockáztatott érték alapú opciós *margin* meghatározását tűztük ki célul. Ha például kiszámítjuk, hogy 1 nap alatt 99 százalékos valószínűséggel mekkora lehet egy adott *call* BUX opció értékingadozása, akkor ezt az összeget egy brókercég az opciót kiíró ügyfelétől fedezetként bekérve, 99 százalékos valószínűséggel védve lesz az árfolyam-ingadozásokkal (illetve az ügyfél nem fizetésével) szemben.

A kiíró piaci kockázata tehát a következőben áll. Az opció eladója kötelezettséget vállal, hogy a jövőben egy adott időpontban egy adott árfolyamon megvásárol (*put* opció) vagy elad (*call* opció) egy adott piaci terméket, most például a spot BUX-ot. Ezért az eladott jogért az opciót megvásárló kifizeti az opciós díjat. Innentől kezdve az alaptermék árfolyamának, illetve az opció értékét meghatározó tényezők közül bármelyik másiknak a megváltozása az opció értékének megváltozásával járhat. Ha az opció értéke a kezdeti opciós prémiumhoz képest csökken, és az opciót megvásárló lehívja az opcióját (illetve az opciót kiíró zárni akarja nyitott pozícióját), akkor a kiíró tényleges veszteséget realizál. Ennek a veszteségnek a kifizetéséért a brókercég felelős, ha az adós ügyfél nem fizet. Ez ellen a piaci kockázatból fakadó hitelkockázat ellen kell a brókercégnek letéti követelményként fedezetet bekérnie az ügyféltől.

Összefoglalva az opció értékét a következő tényezők befolyásolják:

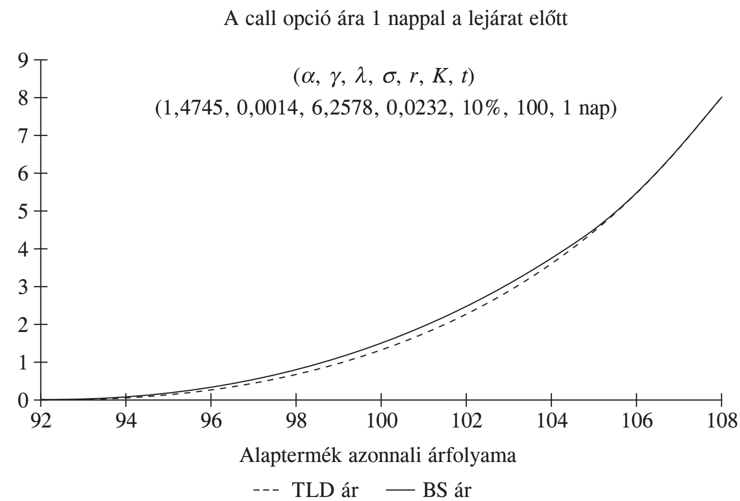
– a mögöttes árfolyam: S,
– a lejáratig számított kockázatmentes kamat: r,
– a logaritmikus hozam volatilitása: σ,
– a lejáratig hátralévő idő: t,
– kötési árfolyam: K,
– csonkolt Lévy-eloszlás paraméterei: α, γ, λ.

E tényezők közül bármelyik elmozdulása megváltoztatja az opciót értékét. Tegyük fel, hogy a brókercég napi változó letétet alkalmaz, amelynek szintjét úgy akarja beállítani, hogy a napi opciós árfolyam-ingadozással szemben 99 százalékos mértékben védve legyen. Ekkor elvi megoldásként a következő közelítést szokás alkalmazni. Vegyük az opcióárazási formulánkat, és képezzük annak teljes differenciálját, amit úgy állíthatunk elő, hogy minden első deriváltat (ezeket hívja a szakirodalom „görögöknek", például az árfolyam szerinti derivált a „delta", az idő szerinti derivált a „theta" stb.) az adott változó megváltozásával megszorozzuk (ez nem más, mint az árazó formulánk lineáris Taylor-sorának felírása). A teljes differenciál az opció értékingadozását mint véletlen értéket adja meg. Ezután az opció értékét befolyásoló tényezők variancia-kovariancia mátrixának segítségével az opció értékingadozását statisztikailag jellemezni lehet, azaz a 99 százalékos kockáztatott érték alapú *margin* kiszámítható.

A módszert azonban nem érdemes tovább részletezni, mert itt újra beleütközünk a gaussi leírás tökéletlenségeibe (az instabil korrelációs mátrix megbízhatatlan, a normális statisztika a csonkolt Lévy-eloszlású régióban nem realisztikus, a lineáris Taylor-sor nem pontos stb.). Véleményünk szerint felesleg közelítést alkalmaznunk, ha egyszer rendelkezésünkre áll egy árazó formula. Ekkor ugyanis az opció értékét befolyásoló tényezők adott időtávú historikus szimulációjával egy teljes és pontos opcióár-statisztika vehető fel. Ebből a statisztikából a megfelelő empirikus percentilis érték kiemelésével egy meglehetősen pontos kockáztatott érték alapú *margin* határozható meg.

7. ábra

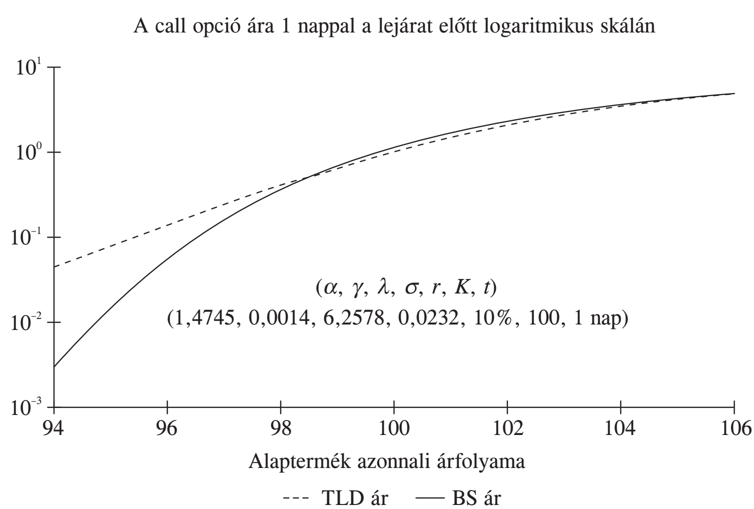
A csonkolt Lévy-eloszláshoz tartozó opcióár eltérése a Black–Scholes-ártól



Megjegyzés: ez az ábra világosan jelzi, hogy a realisztikusabb csonkolt Lévy-eloszláshoz tartozó opcióár eltér a Black–Scholes-ártól (BS-ár), különösen az ATM és OTM tartományban (1 nappal a lejárat előtt).

8. ábra

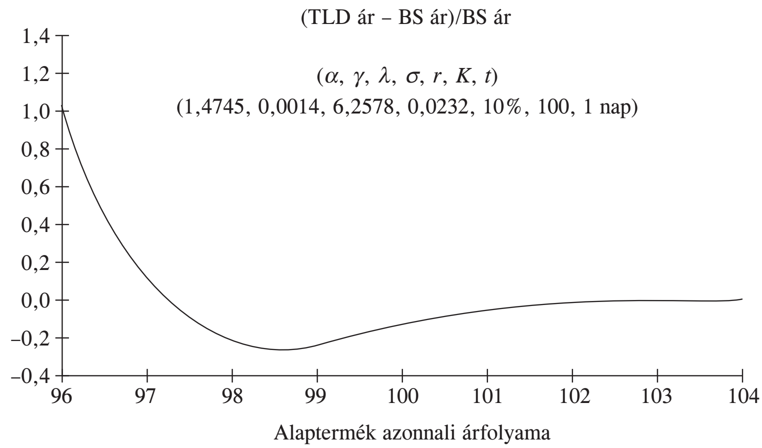
A csonkolt Lévy-eloszláshoz tartozó opcióár eltérése a Black–Scholes-ártól logaritmikus skálán



Megjegyzés: logaritmikus skálán tisztán látható, hogy a realisztikusabb csonkolt Lévy-eloszláshoz tartozó opcióár eltér a Black–Scholes-ártól (BS-ár), különösen az ATM és OTM tartományban (1 nappal a lejárat előtt).

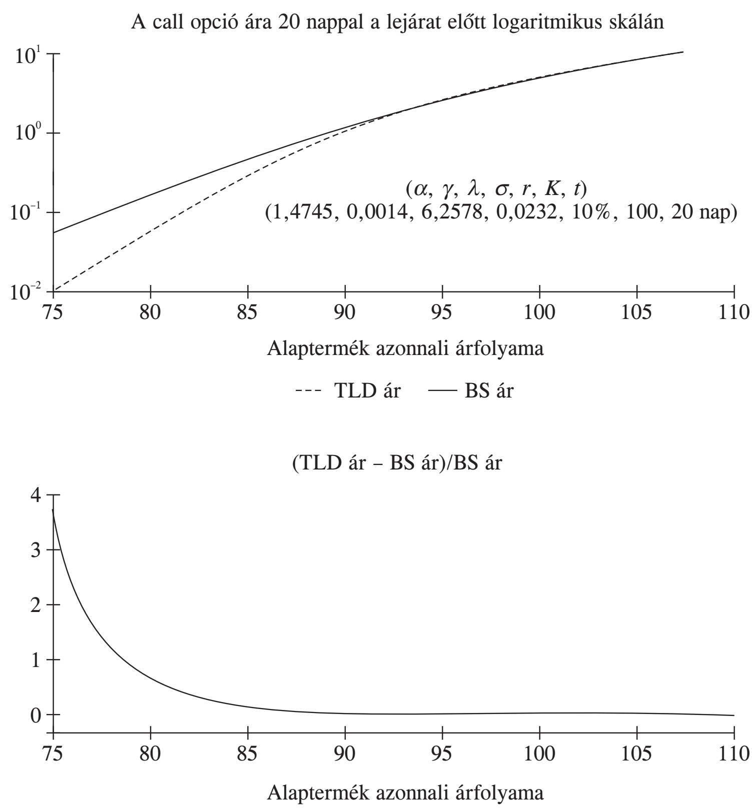
9. ábra

A csonkolt Lévy-korrekciók a Black–Scholes-ár százalékában (1 nappal a lejárat előtt)



10. ábra

A Black–Scholes- és a csonkolt Lévy-alapú ár, valamint a csonkolt Lévy-alapú százalékos korrekció a Black–Scholes-ár felett 4 héttel a lejárat előtt



Perspektívák

Az időfüggetlen csonkolt Lévy-eloszlásos modellünk jól alkalmazhatónak bizonyult az árfolyam-ingadozások statisztikai modellezésére és opcióárazásra. A továbbfejlesztéséhez elengedhetetlenül szükséges lenne a paraméterek olyan dinamizálása, amivel a kockázatkezelési szempontból rendkívül fontos volatilitásklasztereket is le lehetne írni. Az elterjedt megközelítésekkel, az ARCH–GARCH modellekkel mi is kísérleteztünk. Első tapasztalataink alapján az mondhatjuk, hogy a napi adatsűrűség nem elégséges egy pontos paraméterbecsléshez, mert ezek a modellek még erősebben a farokeffektusokon alapulnak. A maximum likelihood (ML) becslések alapján integrált GARCH-modellre következtethettünk, és ezt későbbi alaposabb vizsgálataink nagy biztonsággal alá is támasztották. A maximum likelihood módszer mellett teszteltük a *Mantegna–Stanley* [2000] által javasolt módszert, miszerint a GARCH(1,1) sztochasztikus volatilitásfolyamat paramétereit az empirikus szórás és kurtózis adatok rögzítésével számíthatjuk ki. Az így specifikált GARCH-szimulációnk eredményéül azonban nem pontosan illeszkedő sűrűségfüggvényeket sikerült csak megkonstruálni. Ennek oka a mért kurtózis pontatlansága. Egy másik hátránya a GRACH(1,1) folyamattal generált sztochasztikus hozamoknak, hogy azok volatilitásklasztereződési függvénye túl lassan cseng le. Egy másik fejlesztési terület lehetne az empirikus sűrűségfüggvény aszimmetrikus jellegének figyelembevétele, például a jobb és bal oldalon eltérő csonkolási paraméter bevezetésével.

Hivatkozás

BLACK, F.–SCHOLES, M. [1973]: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81. május, 637–654. o.

BOLLERSLEV, T. [1986]: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics 31, 307–327. o.

BOUCHAUD, J.-P.–POTTERS, R.–CONT, R. [1998]: Financial markets as adaptive systems. Europhys. Lett. 41, 239–244. o.

ENGLE, R. F. [1982]: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica, 50, 987–1002. o.

FELLER, W. [1968]: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1., harmadik kiadás, J. Wiley & Sons, New York.

J. P. MORGAN/REUTERS [1996]: RiskMetrics. Technical document. Fourth Edition, New York.

JÁNOSI IMRE –JANECSKÓ BALÁZS–KONDOR IMRE [1999]: Statistical analysis of 5 s index data of the Budapest Stock Exchange. Physica A 269, 111–124. o.

KOPONEN, I. [1995]: Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process. Phys. Rev. E 52, 1197–1199. o.

KULLMANN, L.-TÖYLI, J.-KERTÉSZ, J.-KANTO, A.-KASKI, K. [1999]: Characteristic times in stock market indices. Physica A 269, 98-110. o.

LUX, T. [1998]: THE SOCIO-ECONOMIC DYNAMICS OF SPECULATIVE MARKETS: INTERACTING AGENTS, CHAOS, AND FAT TAILS OF Return Distributions, J. Econ. Behav. Organ 33, 143-165. o.

MANDELBROT, B. B. [1963]: The Variation of Certain Speculative Prices. J. Business, 36. 392–417. o.

MANTEGNA, R. N. [1994]: Fast, accurate algorithm for numerical simulation of Levy stable stochastic processes. Phys. Rev. E 49, 4677–4683. o.

MANTEGNA, R. N.–STANLEY, H. E. [2000]: An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance. Cambridge University Press, Cambridge.

MATACZ, A. [2000]: Financial modelling and option theory with the truncated Levy process. International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 3, No. 1, 143–160. o.

NUMERICAL RECIPES... [1986–1992]: Computing Fourier Integrals Using the FFT, Numerical Recipes in Fortran 77, 1986–1992. Cambridge University Press, Cambridge.

PALÁGYI, Z.–MANTEGNA, R. N. [1999]: Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market. Physica A 269, 132–139. o.