KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXV. ÉVF., 2018. JÚLIUS–AUGUSZTUS (768–779. o.)

CSÓKA PÉTER

Az adósságelengedés modellezése kooperatív játékelmélettel

Gyakori jelenség, hogy a hitelezők a vállalatokat (országokat, államokat, egyéneket és más szervezeteket) adósságelengedésben részesítik. A fő kérdés az, hogy miként osszuk el a vállalat eszközeinek értékét a hitelezők és a vállalat között. *Csóka–Herings* [2017] átváltható hasznosságú kooperatív játékokkal modellezte a problémát, és a létrejövő játékokat tartozásos játékoknak nevezte. Tanulmányunkban bemutatjuk a tartozásos játékokat és tulajdonságaikat, majd belátjuk, hogy a Shapley-érték is tekinthető tartozásrendezési szabálynak. A szokásos csődjátékokkal szemben a tartozásos játékok fő újdonsága, hogy bennük a vállalat is játékos, és fizetésképtelen esetben is szigorúan pozitív kifizetést kaphat, vagyis kimenthetik. Ilyen értelemben a puha költségvetési korlát szindrómáját leíró modellek egyik változatának is tekinthetjük az adósságelengedés kooperatív játékelméleti modelljét.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C71, G10.

Bevezetés

Gyakori jelenség, hogy egy gazdasági szereplő megegyezik hitelezőivel vagy azok egy részével abban, hogy csökkentsék a fennálló adósság névértékét, vagy csökkentsék és ütemezzék át a fizetéseket. Egy hitelező adósságelengedésre vonatkozó megállapodása a követelése értékének csökkenését jelenti. Országok esetén *Arslanalp–Henry* [2005], *D'Erasmo* [2011] és *Benjamin–Wright* [2009] is körülbelül 30-40 százalék adósságelengedést talált. Az átmeneti és a nyugati gazdaságok vállalatait összehasonlítva, *Schaffer* [1998] azt figyelte meg, hogy az átmeneti gazdaságok vállalatai ugyanakkora adósságelengedést kaptak kereskedelmi hiteleikből a bankoktól, mint a nyugati vállalatok, de adótartozásaikból az állam többet engedett el.[1]

* A szerző köszöni az NKFIH K109354. és K120035. számú kutatási projektjeinek a támogatását és a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület 2017. évi konferenciáján kapott hozzászólásokat.

[1] Az államcsődökről bővebben magyarul lásd a *Vidovics-Dancs* [2013] és [2014] tanulmányokat, a vállalati csődökről pedig a *Virág–Kristóf* [2005] tanulmányt és az arra hivatkozó cikkeket.

Csóka Péter, BCE Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék és MTA KRTK, KTI Játékelméleti Kutatócsoport (e-mail: peter.csoka@uni-corvinus.hu).

A kézirat első változata 2018. június 1-jén érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2018.7-8.768

Fizetésképtelenek lehetnek országok, államok, vállalatok, egyének és más szervezetek is, ezekre a gazdasági szereplőkre összefoglalóan a vállalat kifejezést használjuk a tanulmányban. A *Csóka–Herings* [2017] által elemzett tartozásos problémákban egy bizonyos nagyságú eszközértékkel rendelkező vállalat tartozik a hitelezőinek. A vizsgált kérdés az, hogy miként osszuk el a vállalat eszközeit a hitelezők és a vállalat között. Adott tartozásos probléma esetén egy tartozásrendezési szabály egy kifizetési vektort rendel a hitelezők és a vállalat kifizetéseihez. A kifizetési vektor teljesíti a nemnegativitás, a követelések mint felső korlát és a hatékonyság tulajdonságokat. A nemnegativitás ragadja meg azt, hogy a tartozásrendezés során egy hitelezőnek sem kell fizetnie, és a vállalat korlátolt felelősségű. A követelések mint felső korlát tulajdonság miatt a vállalat minden hitelezőjének maximum annyit fizet, amennyivel tartozik nekik. A hatékonyság szerint a kifizetések összege egyenlő a vállalat eszközeinek értékével.

A kifizetési vektorok még nagy teret biztosítanak az adósságrendezésre. *Sturzenegger–Zettelmeyer* [2007] és *Chatterjee–Eyigungor* [2015] megjegyzi, hogy még nincs széleskörűen elfogadott elmélet a vállalat eszközeinek elosztásakor felmerülő alkudozások modellezésére, de a hitelezők alkalmi társulásokat hozhatnak létre, és megpróbálhatják rávenni a vállalatot, hogy először nekik fizessen. *Csóka–Herings* [2017] átváltható hasznosságú kooperatív játékokkal modellezte a problémát, és a keletkező játékokat tartozásos játékoknak nevezte. Ezekben a játékokban a vállalat és a hitelezők a játékosok, és a szokásos módon a játékosok minden koalíciójához (részhalmazához) azt az értéket rendeljük, amelyet a koalícióban részt vevő játékosok garantálni tudnak maguknak. Azokra a koalíciókra, amelyek tartalmazzák a vállalatot, tekinthetünk úgy, hogy létrehoztak egy társulást, és megpróbálják rávenni a vállalatot, hogy először nekik fizessen, és csak utána a többi hitelezőnek.

A kooperatív játékelméleti tárgyalás előnye, hogy így nem kell részletezni a szereplők döntési lehetőségeit, az információk elérhetőségét és az alkufolyamatokat. A kooperatív játékok általános ismertetésére lásd *Kóczy* [2006] és *Solymosi* [2009] munkáit. A kooperatív játékelmélet alkalmazásai már magyar nyelven is szerteágaznak: ezt a módszert alkalmazta *Pintér* [2007] a statisztikában, *Habis* [2012] a sztochasztikus csődjátékokra, *Csercsik–Kóczy* [2012] a nagyfeszültségű elektromos hálózatokra, *Kovács–Radványi* [2011] az öntözéses problémák költségelosztására, *Kóczy* [2011], [2018] és *Petróczy és szerzőtársai* [2018] szavazási helyzetekben a döntési befolyás elemzésére, *Balog és szerzőtársai* [2011] pedig a kockázatfelosztásra.

Tanulmányunkban bemutatjuk a tartozásos játékokat és tulajdonságaikat. A kooperatív játékelméletben a megoldásnak számos koncepciója létezik arra, hogy miután definiáltuk minden koalíció értékét, elosszuk a nagykoalíció értékét. Mivel tartozásos játékokban a nagykoalíció értéke egyenlő a vállalat eszközeinek értékével, ha egy megoldásnak valamely koncepciója kifizetési vektort eredményez, akkor arra tartozásrendezési szabályként tekinthetünk. *Csóka–Herings* [2017] a nukleoluszra (*Schmeidler* [1969]), ebben a tanulmányban pedig a Shapley-értékre (*Shapley* [1953]) látjuk be, hogy mindig kifizetési vektort kapunk, vagyis megközelítésünk teljesíti a nemnegativitás, a követelések mint felső korlát és a hatékonyság tulajdonságokat.[2]

[2] A Shapley-értékről magyarul lásd *Pintér* [2009] és *Biró és szerzőtársai* [2013].

A tartozásos játékok annyiban különböznek az irodalomban sokat elemzett csődjátékoktól (lásd *O'Neill* [1982], összefoglalókért pedig *Thomson* [2013], [2015]), hogy a tartozásos játékokban a vállalat is játékosként vesz részt, és fizetőképes is lehet. Mivel a vállalat is játékos, ezért a vállalat is részesül kifizetésben, amely a szokásos csődjátékoktól eltérően nem nulla, hanem lehet szigorúan pozitív is. Ezt a helyzetet értelmezhetjük úgy, hogy a vállalat implicit módon azzal fenyegeti adósait, hogy inkább a többieknek fizet, ha nem engednek el az adósságából. A vállalat implicit alkuereje és kimentése az adott megoldáskoncepciótól függ. Ilyen értelemben az adósságelengedés kooperatív játékelméleti modellje tekinthető a puha költségvetési korlát szindrómáját leíró modellek (*Kornai* [1979], [1986], *Kornai és szerzőtársai* [2004]) egyik változatának is.

Tartozásos problémák és tartozásos játékok

Csóka–Herings [2017] jelöléseit követve, jelölje $N=\{0, 1, \ldots, c\}$ az ágensek halmazát, ahol a 0-s ágens a *vállalat*, amelynek a *hitelezői* a $C=\{1, \ldots, c\}$ halmazban vannak, és számuk $|C|=c\geq 1$. A vállalat *eszközeinek értéke* $A\in\mathbb{R}_+$, *tartozásait* pedig az $\ell\in\mathbb{R}_+^C$ vektor jelöli, ahol a vállat az $i\in C$ hitelezőnek $\ell_i\in\mathbb{R}_+$ nemnegatív valós összeggel tartozik.

1. DEFINÍCIÓ • Az $(A,\ell)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^C$ párt *tartozásos problémának (liability problem)* hívjuk. Jelölje $\mathcal{L}$ a tartozásos problémák osztályát.

A tartozáselengedés kérdése úgy vizsgálható, hogy megnézzük, hogy egy tartozásos problémában a hitelezők és a vállalat végül mennyit kap a vállalat eszközeiből. Az $(A, \ell)\in\mathcal{L}$ tartozásos probléma esetén az $x\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^C$ vektort *kifizetési vektornak (payoff vector)* hívjuk, ha teljesíti a *tartozások mint felső korlát* és a *hatékonyság* tulajdonságokat. A tartozások mint felső korlát tulajdonság azt jelenti, hogy egy hitelező sem kap többet, mint a követelése, vagyis $x_i\leq\ell_i$ minden $i\in C$ hitelezőre. A hatékonyság szerint a kifizetések összege megegyezik az eszközök értékével, formálisan: $\sum_{i\in N}x_i=A$. Vegyük észre, hogy a nemnegativitásból és a hatékonyságból az következik, hogy a vállalat kifizetése felülről korlátos, $x_0\leq A$.

Jelölje $\hat{\ell}$ a vállalat eszközeinek értékével csonkolt tartozások vektorát, ahol $\hat{\ell}_i=\min\{A, \ell_i\}$ az $i\in C$ hitelező *csonkolt tartozása.* A hitelezők $S\subseteq C$ részhalmaza esetén legyen $\ell(S)=\sum_{i\in S}\ell_i$ a vállalat összes tartozása az S tagjaival szemben, $\hat{\ell}(S)=\sum_{i\in S}\hat{\ell}_i$ pedig legyen a vállalat összes csonkolt tartozása S tagjaival szemben.

Ha $\ell(C)>A$, akkor a vállalat eszközeinek értéke nem elegendő az összes tartozás kifizetésére, a vállalat *fizetésképtelen.* Ha pedig $\ell(C)\leq A$, akkor a vállalat *fizetőképes.*

A kooperatív játékelméleti modellezéskor feltesszük, hogy a vállalat eszközeinek felosztására az ágensek koalíciókat alkothatnak. A koalíciók az N összes részhalmazának, a 2^N halmaznak az elemei. A tartozásos problémák átírhatók átváltható hasznosságú *(transferable utility)* kooperatív játékokra, ha megadjuk a v karakterisztikus függvényt, amely a koalíciók 2^N halmazából a valós számokba képez, és $v(\varnothing)=0$. Adott N játékoshalmaz esetén az átruházható hasznosságú játékok halmazát jelölje $\mathcal{G}$.

Csóka–Herings [2017] a tartozásos játékokat a következőképpen definiálta.

2. DEFINÍCIÓ • Az $(A, \ell) \in \mathcal{L}$ tartozásos probléma esetén keletkező v: $2^N \to \mathbb{R}$ *tartozásos játék (liability game)* az $S \in 2^N$ koalícióhoz a $v(S)$ értéket rendeli, ahol

$$v(S)=\begin{cases}\min\left\{A,\ \ell\left(S\setminus\{0\}\right)\right\}+\max\left\{A-\ell(C),\ 0\right\}, & \text{ha } 0\in S,\\ \min\left\{\ell(S), \max\left\{0,\ A-\ell\left(C\setminus S\right)\right\}\right\}, & \text{ha } 0\notin S.\end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $v(\varnothing)=0$, azaz valóban játékot definiáltunk, továbbá $v(S)\geq 0$ minden $S \in 2^N$ koalícióra, és $v(N)=A$. *Csóka–Herings* [2017] megjegyezte, hogy a 2. DEFINÍCIÓ az alábbi, könnyen belátható állítás szerint egyszerűsödik fizetőképes és fizetésképtelen vállalat esetében.

1. ÁLLÍTÁS • *Tekintsük az $(A, \ell) \in \mathcal{L}$ tartozásos problémát. Ha a vállalat fizetőképes, vagyis $\ell(C) \leq A$, akkor a keletkező v: $2^N \to \mathbb{R}$ tartozásos játék az $S \in 2^N$ koalícióhoz a $v(S)$ értéket rendeli, ahol*

$$v(S)=\begin{cases}A-\ell\left(C\setminus S\right), & \text{ha } 0\in S,\\ \ell(S), & \text{ha } 0\notin S.\end{cases}$$

Ha a vállalat fizetésképtelen, vagyis $\ell(C) > A$, akkor a keletkező v: $2^N \to \mathbb{R}$ tartozásos játék az $S \in 2^N$ koalícióhoz a $v(S)$ értéket rendeli, ahol

$$v(S)=\begin{cases}\min\left\{A,\ \ell\left(S\setminus\{0\}\right)\right\}, & \text{ha } 0\in S,\\ \max\left\{0,\ A-\ell\left(C\setminus S\right)\right\}, & \text{ha } 0\notin S.\end{cases}$$

A tartozásos játékok definíciójának megértéséhez tekintsünk egy tetszőleges $S \in 2^N$ koalíciót és a többi játékosból álló (komplementer) $N \setminus S$ koalíciót. Ha a vállalat (a 0-s játékos) fizetőképes, akkor minden tartozását kifizeti, és megtartja a maradék eszközeit. Ha a vállalat fizetésképtelen, akkor először annak a koalíciónak fizet, amelyiknek tagja (maximum annyit, amennyivel nekik tartozik, és amennyi az eszközeinek az értéke), majd pedig a komplementer koalíciónak, ha még van miből. Arra a koalícióra, amelyik tartalmazza a vállalatot, tekinthetünk úgy, hogy létrehozott egy társulást, és megpróbálja rávenni a vállalatot, hogy először az ő tagjainak fizessen. Összességében azt mondhatjuk, hogy egy koalíció értéke az az érték, amelyet a tagok garantálni tudnak maguknak, függetlenül attól, hogy a komplementer koalíció tagjai mit csinálnak.

A tartozásos játékok definícióját a következő két példával illusztráljuk.

1. PÉLDA • Tekintsük azt a tartozásos problémát, amelyben két hitelező van, vagyis $N=\{0, 1, 2\}$. Legyen $A=12$ és $\ell=(6, 9)$, vagyis a vállalat fizetésképtelen. A keletkezett v tartozásos játékot az *1. táblázat* mutatja.

1. táblázat
A keletkezett tartozásos játék, ha $N=\{0, 1, 2\}$, $A=12$, $\ell_1=6$ és $\ell_2=9$

S	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$v(S)$	0	3	6	6	9	12	12

Például a $\{2\}$ (egyszemélyes) koalíció értéke 6, mivel ennyi marad a 2-es hitelezőnek, miután a vállalat mindent kifizetett az 1-esnek. Másképpen fogalmazva: ennyit kaphat a 2-es hitelező, ha nem kooperál a vállalattal. A $\{0, 2\}$ koalíció értéke 9, mert ha a vállalat a 2-es hitelezővel van együtt, akkor először annak fizet, maximum a 9 értékű tartozás (és a vállalat 12 értékű eszközeinek) erejéig.

Könnyen belátható, hogy az 1. PÉLDÁBAN nincs olyan $x \in \mathbb{R}_+^{\{0,1,2\}}$ kifizetési vektor, amelyre ne panaszkodna legalább egy koalíció. Ha $x_0 = 0$, akkor $v(\{0, 1\}) = 6$ és $v(\{0, 2\}) = 9$ miatt az $x_1 + x_2 \geq 15$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell ahhoz, hogy a $\{0, 1\}$ és $\{0, 2\}$ koalíció se ellenkezzen. Mivel 12 egységnyi eszközt kell elosztani, ez lehetetlen. Ha $x_0 > 0$, akkor $v(\{1, 2\}) = 12$ miatt $x_0 + x_1 + x_2 > 12$, ami nem teljesíthető. Ilyenkor a játék magja üres, amelynek a definiálásához tekintsük a következő kooperatív játékelméleti fogalmakat!

Legyen a $v \in \mathcal{G}$ játék adott! Az $x \in \mathbb{R}^N$ vektorban legyen x_i az $i \in N$ játékosra allokált összeg. Az $x \in \mathbb{R}^N$ vektor *szétosztás*, ha Pareto-hatékony, vagyis $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Az x szétosztás összesen $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ összeget ad az $S \in 2^N$ koalíció tagjainak. Az x szétosztás *csoportosan elfogadható*, ha $x(S) \geq v(S)$ minden $S \in 2^N$ koalícióra. A v játék *magja* (*Gillies* [1959]) a csoportosan elfogadható szétosztások halmaza. Az x szétosztás dominált az $S \in 2^N$ koalíción keresztül, ha $x(S) < v(S)$. Az $S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ koalíció és az x szétosztás esetén legyen $e(S, x) = v(S) - x(S)$ az *elégedetlenség*, amely azt mutatja meg, hogy az S koalíció mennyire elégedetlen az x szétosztással. Könnyen látható, hogy egy szétosztás magbeli, ha annál egy koalíció elégedetlensége sem pozitív.

Ha az 1. PÉLDÁBAN a vállalat eszközeinek értékét 20-ra emeljük, akkor a következő játékot kapjuk.

2. PÉLDA • Tekintsük azt a tartozásos problémát, amelyben két hitelező van, vagyis $N = \{0, 1, 2\}$. Legyen $A = 20$ és $\ell = (6, 9)$, vagyis a vállalat fizetőképes. A keletkezett v tartozásos játékot a *2. táblázat* tartalmazza.

2. táblázat
A keletkezett tartozásos játék, ha $N = \{0, 1, 2\}$, $A = 20$, $\ell_1 = 6$ és $\ell_2 = 9$

S	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$v(S)$	0	5	6	9	11	14	15	20

Ebben a példában csak egy magbeli szétosztás van: $x = (5, 6, 9)$. Ebben a szétosztásban a vállalat kifizeti a hitelezőit, és megtartja a maradék eszközeit.

Csóka–Herings [2017] belátta, hogy egy tartozásos játék magja pontosan akkor nem üres, ha a vállalat fizetőképes (lásd 2. PÉLDA), vagy fizetésképtelen, de csak egy pozitív tartozása van. Formálisan ez a feltétel a hitelezők összes csonkolt tartozására vonatkozó $\hat{\ell}(C) \leq A$ egyenlőtlenséggel ragadható meg, amely ekvivalens azzal, hogy $\ell(C) \leq A$, vagy létezik olyan $i \in C$ hitelező, amelyre $\ell_i > A$, és $\ell_j = 0$ minden más $j \in C \setminus \{i\}$ hitelezőre. A játék magja tehát az érdekes esetekben (amikor legalább két pozitív tartozása van a vállalatnak) üres.

A tartozásos játékok kapcsán az alábbi tulajdonságokat érdemes elemezni.

3. DEFINÍCIÓ • A $v \in \mathcal{G}$ játék
• *additív*, ha minden $S \in 2^N$ koalícióra igaz, hogy $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$;
• *konstans összegű* (*Neumann–Morgenstern* [1944]), ha minden $S \in 2^N$ koalícióra igaz, hogy $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$;
• *konvex* (*Shapley* [1971]), ha minden $S, T \in 2^N$ koalícióra igaz, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$;
• *konkáv*, ha minden $S, T \in 2^N$ koalícióra igaz, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$;
• *szuperadditív*, ha minden olyan $S, T \in 2^N$ koalícióra, amire $S \cap T = \varnothing$ teljesül, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$;
• *zéró-monoton*, ha minden $i \in N$ játékosra és minden $S \subseteq N \setminus \{i\}$ koalícióra igaz, hogy $v(S) + v(\{i\}) \leq v(S \cup \{i\})$.

Vegyük észre, hogy az additivitásból következik a konstansösszegűség és a konvexitás, a konvexitásból következik a szuperadditivitás, a szuperadditivitásból következik a zéró-monotonitás, de visszafelé nem igazak ezek a következtetések.

Csóka–Herings [2017] belátta, hogy egy tartozásos játék pontosan akkor additív, ha a mag nem üres, vagyis a vállalat fizetőképes, vagy fizetésképtelen, de csak egy pozitív tartozása van.

A konstansösszegűség teljesül az 1. és a 2. PÉLDÁBAN is, tetszőleges koalíció és a komplementer koalíció értéke mindig a vállalat eszközeinek értékét adja. *Csóka–Herings* [2017] belátta, hogy tetszőleges $(A, \ell) \in \mathcal{L}$ tartozási probléma estén a keletkezett v tartozásos játék konstans összegű.

A tartozásos játékok bizonyos részei konvex és konkáv tulajdonságokkal is rendelkeznek. Ha csak a hitelezőket tartalmazó koalíciókat tekintjük, akkor az 1. és természetesen a 2. PÉLDÁBAN is konvex játékot kapunk. Ekkor speciális esetként megkapjuk az *O'Neill* [1982] által definiált csődjátékokat. A tartozásos játékok úgy általánosítják a csődjátékokat, hogy a vállalatot is játékosként kezelik, és a vállalat lehet fizetőképes is. Ha olyan koalíciókat tekintünk, amelyek tartalmazzák a vállalatot, akkor konkáv játékot kapunk: például az 1. PÉLDÁBAN $v(\{0, 1\}) + v(\{0, 2\}) = 15 < v(\{0\}) + v(\{0, 1, 2\}) = 12$.

Csóka–Herings [2017] belátta, hogy minden tartozásos játék szuperadditív, így zéró-monoton is. A szuperadditivitás miatt mindig érdemes két diszjunkt koalíciónak egyesülnie, a végén létre fog jönni a minden játékost tartalmazó nagykoalíció, amelynek valamilyen módszer szerint el kell osztania a vállalat eszközeit, és rendeznie kell a vállalat tartozásait.

Tartozásrendező szabályok

A tartozásrendező szabályok minden tartozásos problémához egy olyan kifizetési vektort rendelnek, amely teljesíti a nemnegativitás, követelések mint felső korlát és hatékonyság tulajdonságokat.

4. DEFINÍCIÓ • A *tartozásrendező szabály (liability rule)* olyan $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+^N$ függvény, amely minden $(A, \ell) \in \mathcal{L}$ tartozásos problémában minden $i \in C$ hitelezőre teljesíti, hogy $f_i(A, \ell) \leq \ell_i$, és $\sum_{i \in N} f_i(A, \ell) = A$.

A kooperatív játékelméletben számos megoldáskoncepció áll rendelkezésünkre, amelyek adott játékhoz egy szétosztást rendelnek, vagyis szétosztják a nagykoalíció értékét. Tartozásos játékok esetén, ha a kooperatív játékelméleti megoldáskoncepció kifizetési vektort ad, akkor arra tartozásrendező szabályként is tekinthetünk.

Az egyik leggyakrabban elemzett megoldáskoncepció a Shapley-érték (*Shapley* [1953]).

5. DEFINÍCIÓ. Adott $v \in \mathcal{G}$ játék esetén

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left(v\left(S \cup \{i\}\right) - v(S)\right) \frac{|S|!\left(|N \setminus S| - 1\right)!}{|N|!}, \quad i \in N$$

az *i-edik játékos Shapley-értéke.*

A Shapley-érték értelmezéséhez tekintsük a játékosok minden lehetséges permutációját ($|N|!$) azonos valószínűséggel! Egy adott permutáció szerint a játékosok bemennek egy szobába, és kiszámítjuk az érkező játékos határ-hozzájárulását a bent lévő játékosok koalíciójához ($v(S \cup \{i\}) - v(S)$). Ekkor egy játékos Shapley-értéke a várható határ-hozzájárulása, mivel az előtte lévő játékosok $|S|!$ módon, az utána lévők pedig $(|N \setminus S| - 1)!$ módon következhetnek egymás után. Ezeknek megfelelően az 1. PÉLDÁBAN a Shapley-érték kiszámítása a *3. táblázatban* látható.

3. táblázat
Shapley-érték az 1. PÉLDÁBAN

Permutáció	Határ-hozzájárulás		
	0-s játékos	1-es játékos	2-es játékos
0, 1, 2	0	6	6
0, 2, 1	0	3	9
1, 0, 2	3	3	6
1, 2, 0	0	3	9
2, 0, 1	3	3	6
2, 1, 0	0	6	6
Átlag $= \phi(v)$	1	4	7

Például az 1, 2, 0 permutáció esetén $v(\{1\}) = 3$, $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 9$ és $v(\{0, 1, 2\}) - v(\{1,2\}) = 12 - 12 = 0$ adja a 0, 3, 9 értékeket, ha a 0-s, 1-es, 2-es játékos sorrendben írjuk fel őket. Az 1. PÉLDÁBAN $N = \{0, 1, 2\}$, $A = 12$ és $\ell = (6, 9)$ esetén a Shapley-érték tehát $\phi(v) = (1, 4, 7)$, ami azt jelenti, hogy a fizetésképtelen vállalat kifizetése a tartozásrendezés után pozitív. A vállalat végül 1 egységnyi eszközét megtarthatja, mivel mindkét hitelezője 2 egység adósságát elengedte. Összesen tehát 4 egységnyi adósságot engedtek el a hitelezők a vállalatnak, pedig csőd esetén csak $6 + 9 - 12 = 3$ egységnyit kellett volna elengedniük. Mivel legalább két pozitív tartozása van a vállalatnak, ezt a helyzetet magyarázhatjuk úgy, hogy a vállalat implicit módon azzal fenyegeti adósait, hogy inkább a többieknek fizet, ha nem engednek el az adósságából. A vállalat implicit alkuereje a Shapley-értékben elég erős ahhoz, hogy végül 1 egységnyi eszközét megtartsa. Könnyen látható, hogy ha legalább két pozitív adósság és fizetésképtelen vállalat esetén a legkisebb követeléssel rendelkező hitelezőhöz a vállalat határ-hozzájárulása szigorúan pozitív, akkor Shapley-értékben a vállalat (a határ-hozzájárulások átlagaként) mindig pozitív összeghez jut.

A 2. PÉLDÁBAN (és minden olyan tartozásos játékban, amikor a játék additív) azt kapjuk, hogy a Shapley-érték szerint a vállalat kifizeti a hitelezőit, és megtartja a maradék eszközeit, vagyis nincs adósságelengedés. A fizetőképes vállalat nem tud azzal fenyegetni, hogy inkább a többi adósnak fizet, mert végül minden tartozását képes kifizetni.

A Shapley-értékre általánosan beláthatjuk, hogy tekinthető tartozásrendezési szabálynak, vagyis teljesíti a nemnegativitás, a követelések mint felső korlát és a hatékonyság tulajdonságokat.

2. ÁLLÍTÁS • *Tetszőleges* $(A, \ell) \in \mathcal{L}$ *tartozási probléma estén a keletkezett* v *tartozásos játékban a* $\phi(v)$ *Shapley-értékre igaz, hogy*

- $\phi(v) \geq 0$,
- *minden* $i \in C$ *hitelezőre igaz, hogy* $0 \leq \phi_i(v) \leq \ell_i$, *és*
- $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = A$.

BIZONYÍTÁS • Mivel minden tartozásos játékban minden koalíció értéke nemnegatív, és minden tartozásos játék szuperadditív, ezért minden $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ határ-hozzájárulás nemnegatív. Mivel a Shapley-érték a határ-hozzájárulások átlaga, ezért az is nemnegatív.

A tartozásos játékok definíciójából könnyen látható, hogy minden hitelező határ-hozzájárulására követeléseinek a nagysága a maximum. Mivel a Shapley-érték a határ-hozzájárulások átlaga, ezért teljesül a követelések mint felső korlát tulajdonság.

Mivel a Shapley-érték szétosztás, ezért hatékony. ■

Mivel legalább két pozitív adósság és fizetésképtelen vállalat esetén a tartozásos játékok magja üres, akármilyen szétosztást választunk, mindig lesz elégedetlen koalíció. A nukleolusz (*Schmeidler* [1969]) éppen ezeket az elégedetlenségeket minimalizálja lexikografikus módon: először a legnagyobb elégedetlenséget csökkentve, majd a második legnagyobbal folytatva, és így tovább.

A formális definíció helyett tekintsük újra az 1. PÉLDÁT. A Shapley-érték $x = (1, 4, 7)$ szétosztása esetén az $S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ koalíciók elégedetlensége a következő *(4. táblázat).*

4. táblázat
Az elégedetlenségek a Shapley-érték $x = (1, 4, 7)$ szétosztása esetén az 1. PÉLDÁBAN

S	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$
$e(S, (1, 4, 7))$	–1	–1	–1	1	1	1

A kétszemélyes koalíciók esetén az elégedetlenségek összege $v(\{0, 1\}) + v(\{0, 2\}) + v(\{1, 2\}) - 2x(N) = v(\{0, 1\}) + v(\{0, 2\}) + v(\{1, 2\}) - 2v(N) = 27 - 24 = 3$. Ebből következően tetszőleges kétszemélyes koalíció maximális elégedetlensége legalább 1, és bármilyen (1 ,4, 7)-től eltérő szétosztás 1 fölé növeli valamelyik kétszemélyes koalíció elégedetlenségét. Azt kapjuk tehát, hogy ebben a játékban a nukleolusz is (1, 4, 7), egybeesik a Shapley-értékkel.

Csóka–Herings [2017] belátta, hogy pontosan két hitelező esetén minden tartozásos játékban a Shapley-érték egybeesik a nukleolusszal, és minden hitelező nominálisan azonos adósságot enged el, de kettőnél több hitelező esetén az állítás már nem igaz. A szerzőpáros azt is bizonyította, hogy a nukleolusz is tekinthető tartozásrendezési szabálynak. A nukleolusz legalább két adóssággal rendelkező fizetésképtelen vállalat esetén a vállalathoz szigorúan pozitív kifizetést rendel, amely maximum a vállalat eszközeinek a fele. Vagyis az elégedetlenségeket minimalizáló nukleolusz esetén is elég erős ilyenkor a vállalat implicit alkuereje ahhoz, hogy a vállalat megtartson az eszközeiből.

Az igazságosságot szociálisan érzékenyen megragadó nukleoluszban érdekes módon a követelésekre létezik egy küszöb, amely alatt nincs adósságelengedés, és amely fölött nominálisan egyre növekszik az adósságelengedés. A kisebb követeléssel rendelkező hitelezők a nukleoluszban tehát lehet, hogy végül nem engednek a követeléseikből, és minél nagyobb egy hitelező követelése, annál többet enged el belőle nominálisan. Ugyanakkor az is belátható – és a gyakorlatban legtöbbször tapasztaljuk is –, hogy a nukleolusz jól közelíthető arányosan azonos adósságelengedéssel.

Záró megjegyzések

Tanulmányunkban bemutattuk a kooperatív játékelméleti keretet használó tartozásos játékokat és tulajdonságaikat, és beláttuk, hogy nukleolusz mellett a Shapley-érték is tekinthető tartozásrendezési szabálynak. További kutatási irányként mindkét megoldáskoncepció tovább elemezhető, megvizsgálható például kiszámításuk bonyolultsága a tartozási játékok osztályán. Bár a Shapley-értékre van képlet, kiszámítása sok játékos esetén nehézségekbe ütközhet. A nukleolusz hatékony kiszámítására (*Solymosi–Sziklai* [2016], *Sziklai és szerzőtársai* [2017]) és illusztrálására (*Fleiner–Sziklai* [2012]) más, de kapcsolódó játékosztályok esetén hazai szerzők értek el friss eredményeket. Természetesen további megoldáskoncepciókat is lehetne vizsgálni, például érdekes lehet a stabil halmaz vizsgálata is (erről magyarul lásd *Kóczy* [2006]).

A tartozásos játékok modellje egy statikus, kooperatív játékelméleti modell az adósságelengedésre. Az irodalomban dinamikus modellek is megjelentek a jelenség vizsgálatára. *Anderson–Sundaresan* [1996] olyan dinamikus modellt vizsgált bizonytalanság mellett, amelyben a hitelezőknek lehetőségük van valamilyen költséges bírósági eljárást igénybe venni, vagy elengedhetnek a követeléseikből. *Yue* [2010] az államcsődöket és a hitelek újratárgyalását modellezi egy általános egyensúlyi modellben, ahol nemteljesítés esetén az adott állam elveszítheti hozzáférését a tőkepiacokhoz. *Corden* [1988] azzal modellezi az adósságelengedést, hogy ekkor az adós nagyobb erőfeszítést tesz azért, hogy növelje eszközei értékét. A problémát lehetne még új dinamikus alkujátékokkal is vizsgálni, hasonló modellekről magyarul lásd *Eső–Wallace* [2013]. Mind a statikus, mind a dinamikus modell tesztelése érdekes lehet kísérleti közgazdaságtan segítségével.

Hivatkozások

Anderson, R. W.–Sundaresan, S. [1996]: Design and valuation of debt contracts. Review of Financial Studies, Vol. 9. No. 1. 37–68. o. https://doi.org/10.1093/rfs/9.1.37.

Arslanalp, S.–Henry, P. B. [2005]: Is debt relief efficient? Journal of Finance, Vol. 60. No. 2. 1017–1051. o. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2005.00754.x https://doi.org/10.3386/w10217.

Balog Dóra–Bátyi Tamás László–Csóka Péter–Pintér Miklós [2011]: Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. Közgazdasági Szemle, 58. évf. 7–8. sz. 619–632. o.

Benjamin, D.–Wright, M. L. J. [2009]: Recovery before redemption: A theory of delays in sovereign debt renegotiations. Working Paper, 63 o. https://doi.org/10.2139/ssrn.1392539.

Biró Péter–Csóka Péter–Kóczy Á. László–Radványi Anna–Sziklai Balázs [2013]: Közgazdasági Nobel-emlékdíj 2012: Alvin E. Roth és Lloyd S. Shapley. Magyar Tudomány, 174. évf. 2. sz. 190–199. o.

Chatterjee, S.–Eyigungor, B. [2015]: A seniority arrangement for sovereign debt. American Economic Review, Vol. 105. No. 12. 3740–3765 o. https://doi.org/10.1257/aer.20130932.

Corden, W. M. [1988]: Debt relief and adjustment incentives. IMF Staff Papers, 36. 628–643. o. https://doi.org/10.5089/9781451977851.001.

Csercsik Dávid–Kóczy Á. László [2012]: Hatékonyság és stabilitás nagyfeszültségű elektromos hálózatokban: egy játékelméleti megközelítés. Szigma, 43. évf. 1–2. sz. 43–58. o.

Csóka Péter–Herings, P. J. J. [2017]: Liability games. Műhelytanulmány, Maastricht University, SSRN Electronic Journal, https://doi.org/10.2139/ssrn.3091760.

D'Erasmo, P. [2011]: Government reputation and debt repayment in emerging economies. Working Paper, 49 o. https://pdfs.semanticscholar.org/2ef9/45abe949b288401cef24344271c80b89a0fc.pdf.

Eső Péter–Wallace, C. [2013]: Meggyőzés és megegyezés egy dinamikus alkujátékban. Közgazdasági Szemle, 60. évf. 9. sz. 930–939. o.

Fleiner Tamás–Sziklai Balázs [2012]: The nucleolus of the bankruptcy problem by hydraulic rationing. International Game Theory Review, Vol. 14. No. 1. https://doi.org/10.1142/s0219198912500077.

Gillies, D. B. [1959]: Solutions to general non-zero-sum games. Megjelent: *Tucker, A. W.–Duncan, L. R.* (szerk.): Contributions to the Theory of Games. Annals of Mathematics Studies, Vol. 4. 47–85. o. https://doi.org/10.1515/9781400882168-005.

Habis Helga [2012]: Sztochasztikus csődjátékok – avagy hogyan osszunk szét egy bizonytalan méretű tortát? Közgazdasági Szemle, 59. évf. 12. sz. 1299–1310. o.

Kóczy Á. László [2006]: A Neumann-féle játékelmélet. Közgazdasági Szemle, 53. évf. 1. sz. 31–45. o.

Kóczy Á. László [2011]: Lisszaboni kilátások. Közgazdasági Szemle, 58. évf. 12. sz. 1045–1058. o.

Kóczy Á. László [2018]: Döntési befolyás az Európai Unió Tanácsában: Mit hozhat a Brexit? Alkalmazott Matematikai Lapok, megjelenés alatt.

Kóczy Á. László–Pintér Miklós [2011]: Az ellenzék ereje – általánosított súlyozott szavazási játékok. Közgazdasági Szemle, 58. évf. 6. sz. 543–551 o.

Kornai János [1979]: Resource-constrained versus demand-constrained systems. Econometrica, Vol. 47. No. 4. 801–819. o. https://doi.org/10.2307/1914132.

Kornai János [1986]: A puha költségvetési korlát. Tervgazdasági Fórum, 2. évf. 3. sz. 1–18. o. Angolul: The soft budget constraint. Kyklos, Vol. 9. 3–30. o. https://doi.org/10.1111/j.1467-6435.1986.tb01252.x.

Kornai János–Maskin, E.–Roland, G. [2004]: A puha költségvetési korlát. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 7–8. sz. 608–624. o. és 9. sz. 776–809. o.

Kovács Gergely–Radványi Anna [2011]: Költségelosztási modellek. Alkalmazott Matematikai Lapok, 28. évf. 59–76. o. http://aml.math.bme.hu/wp-content/uploads/2012/06/28-kovacs_radvanyi.pdf.

Neumann, J. von–Morgenstern, O. [1944]: Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

O'Neill, B. [1982]: A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences, Vol. 2. No. 4. 345–371. o. https://doi.org/10.1016/0165-4896(82)90029-4.

Petróczy Dóra Gréta–Rogers, M. F.–Kóczy Á. László [2018]: Tagkilépések és a magyar befolyás változása az Európai Unió Tanácsában. Alkalmazott Matematikai Lapok, megjelenés alatt.

Pintér Miklós [2007]: Regressziós játékok. Szigma, 38. évf. 3–4. sz. 131–147. o.

Pintér Miklós [2009]: A Shapley-érték axiomatizálásai. Alkalmazott Matematikai Lapok, 26. évf. különszám, 289–315. o.

Schaffer, M. E. [1998]: Do firms in transition economies have soft budget constraints? A reconsideration of concepts and evidence. Journal of Comparative Economics, Vol. 26. No. 1. 80–103. o. https://doi.org/10.1006/jcec.1997.1503.

Schmeidler, D. [1969]: The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 17. No. 6. 1163–1170. o. https://doi.org/10.1137/0120009.

Shapley, L. S. [1953]: A value for n-person games. Megjelent: *Kuhn, H. W.–Tucker, A. W.* (szerk.): Contributions to the Theory of Games. Vol. 2. Annals of Mathematics Studies, 28. Princeton University Press, Princeton–New Jersey, 307–317. o. https://doi.org/10.1515/9781400881970-018.

Shapley, L. S. [1971]: Cores of convex games. International Journal of Game Theory, Vol. 1. No. 1. 11–26. o. https://doi.org/10.1007/bf01753431.

Solymosi Tamás [2009]: Kooperatív játékok. Magyar Tudomány, 170. évf. 5. sz. 547–558. o.

Solymosi Tamás–Sziklai Balázs [2016]: Characterization sets for the nucleolus in balanced games. Operations Research Letters, Vol. 44. No. 4. 520–524. o. https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.05.014.

Sturzenegger, F.–Zettelmeyer, J. [2007]: Debt defaults and lessons from a decade of crises. MIT Press, Cambridge, MA.

Sziklai Balázs–Fleiner Tamás–Solymosi Tamás [2017]: On the core and nucleolus of directed acyclic graph games. Mathematical Programming, Vol. 163. No. 1–2. 243–271. o. https://doi.org/10.1007/s10107-016-1062-y.

Thomson, W. [2013]: Game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: Recent advances. International Game Theory Review, Vol. 15. No. 3. 1–14. o. https://doi.org/10.1142/s0219198913400185.

Thomson, W. [2015]: Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: An update. Mathematical Social Sciences, Vol. 74. 41–59. o. https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2014.09.002.

Vidovics-Dancs Ágnes [2013]: Államcsődök. Tények és alapfogalmak újragondolva. Hitelintézeti Szemle, 12. évf. 4. sz. 285–305. o.

Vidovics-Dancs Ágnes [2014]: Az államcsőd költségei régen és ma. Közgazdasági Szemle, 61. évf. 3. sz. 262–278. o.

Virág Miklós–Kristóf Tamás [2005]: Az első hazai csődmodell újraszámítása neurális hálók segítségével. Közgazdasági Szemle, 52. évf. 2. sz. 144–162. o.

Yue, V. Z. [2010]: Sovereign default and debt renegotiation. Journal of International Economics, Vol. 80. No. 2. 176–187. o. https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2009.11.004.