Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. január (8–19. o.)

ÁBEL ISTVÁN–DOBOS IMRE

Bródy András gazdaságiciklus-elmélete

Bródy András kutatásainak egyik központi témaköre a gazdasági mozgás vizsgálata volt. Írásunkban Bródy elméletét kívánjuk röviden áttekinteni és összefoglalni. A termelés sokszektoros leírása egyben árelméletét (értékelméletét, méréselméletét) is keretbe foglalja. Ebben a keretben a gazdasági mozgás összetett ingadozása technológiai alapon elemezhető. Bródy megközelítésében a gazdasági ciklust nem külső megrázkódások magyarázzák, hanem a termelési rendszer belső arányai és kapcsolatai. A termelési struktúrát az árak és a volumenek egyformán alakítják, ezek között nincsen kitüntetett vagy domináns tényező. Az árak és a volumenek a köztük lévő duális kapcsolatban alakulnak ki. A gazdaság mozgásegyenleteit technológiai mérlegösszefüggések, valamint a piaci csere útján a gazdaságban újraelosztásra (újratermelésre) kerülő termékek felhasználása és az eszközlekötés változása írja le. Az így meghatározott mozgásegyenletek a gazdaság természetes mozgását ciklusmozgás alakjában írják le. A technológia vagy az értékviszonyok megváltozása (sokkok) a gazdaság ciklikus mozgásának megváltozásában tükröződik. Bródy munkáiban technológiai megalapozást nyer a történelemből ismert számos jellegzetes gazdasági ciklus.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: D46, E32.

Az input-output elemzésről

Az input-output elemzés elméleti és kvantitatív módszereinek kifejlesztésében játszott úttörő szerepéért Wassily Leontiefnek 1973-ben ítélték oda a közgazdasági Nobel-díjat. Az input-output elemzés elméleti és gyakorlati alkalmazásai terén számos magyar közgazdász ért el nemzetközileg elismert eredményeket. Augusztinovics Mária (gazdaságpolitikai alkalmazás), Bródy András (cikluselmélet), Kornai János és Martos Béla (vegetatív szabályozás), valamint Simonovits András (sztochasztikus inverz) mellett még számos magyar közgazdász munkáját joggal említhetnénk itt. Az input-output elemzés ma nem divatos ága a közgazdaságtannak, de számos eleme beépült más területek módszereibe.

* A szerzők Bródy András tanítványának vallják magukat, bár tanulmányaik idején Bródy-tantárgy nem létezett. A hetvenes évektől kezdődően András alkalmanként előadott a Rajk László Szakkollégiumban, ahol egy-egy önképzőköri kurzus az ő munkái köré szerveződött. Kiterjedt és önzetlen mentori tevékenysége sok fiatal számára életre szóló élményt jelentett. Személyes kapcsolatunk Andrással régre datálódik, és élete utolsó szakaszában ismét intenzívebbé vált. Ezt az írásunkat még félkészen láthatta, de szerényen értésünkre adta, hogy túlzottnak tartja jelentőségének emlegetését és a munkáira való hivatkozást. Az eredményeket tartotta fontosnak nem a személyt. A tudományt szolgálta, személyes érdek nélkül, derűvel, makacs szenvedéllyel.

Ábel István habilitált egyetemi tanár (Budapesti Corvinus Egyetem) és tanácsadó (Nemzetközi Valutaalap, Washington).

Dobos Imre egyetemi docens (Vállalatgazdaságtan Intézet, Budapesti Corvinus Egyetem).

Ez a megközelítés a gazdaságot egy olyan komplex rendszerként kezeli, amely sok egyenrangú elemből áll, és ezek kölcsönhatásain keresztül vizsgálja a gazdaság mozgását. Ez a konstrukció összekapcsolja a mikroadatokat és a nemzetgazdasági számlarendszert, az elméletet és a gazdaságpolitikai hatásvizsgálatot. Az input-output megközelítés előfutáraiként Quesnay Tableau Economique-ját (1758–1759), Marx újratermelési sémáit és Bortkiewitz transzformációs problémára adott megoldását szokták említeni. Ezek az elődök azonban egy-egy specifikus kérdés vizsgálatára szorítkoztak, míg Leontief érdeme, hogy az input-output elemzést univerzális eszközzé fejlesztette (*Baumol–Raa* [2009]). Sok gazdasági probléma elemzésénél ma is az input-output elemzés tekinthető az egyik alapvető módszernek. *Raa* [2005] három kérdéskört emel ki ezek közül. Az egyik a gazdasági *teljesítmény*, a hatékonyság és a termelékenység összetevőinek mérése és elemzése többszektoros megközelítésben. A másik a gazdaság *komparatív előnyeinek* összevetése más országokéval a külkereskedelem szerkezete tükrében. A harmadik kérdéskör a gazdasági teljesítmény alakulásának jellemzői nem szorosan vett gazdasági korlátok, például *környezetvédelmi* megfontolások tükrében.[1] Ebben az írásban az input-output elemzés módszerei témakörén belül egy *negyedik* területet tekintünk át. E negyedik területet jórészt Bródy András térképezte fel, és számos kérdésében úttörő jelentőségű eredményt ért el. Ez a negyedik terület a *gazdasági ciklus* és a gazdaság többszektoros mozgásjellemzőinek elemzése.

A gazdasági ciklus kérdései Bródy András munkáiban kiemelkedő helyet foglalnak el, Ciklus és szabályozás című műve a ciklust egy Leontief-típusú gazdaság modelljével írja le (*Bródy* [1980]).[2] Ebben integrálja az input-output modellek széles körű eredményeit, összekapcsolva azokat olyan dinamikus indíttatású megközelítésekkel, mint például *Goodwin* [1967] sokat idézett ciklusmodellje. Bródy modellezési módszerei és elméleti rendszere gyakran támaszkodik a természettudományok matematikai konstrukcióira, és ebbe a képbe illeszkedik a Goodwin-modell struktúrája is, amely a természettudományokból ismert Lotka–Volterra-differenciálegyenleteket alkalmazza. Bródy másik jelentős összegző műve mintegy negyedszázaddal későbbről visszanézve gyűjti egybe a ciklussal kapcsolatos vizsgálódásainak eredményeit (*Bródy* [2004]). Erre a szintézisre leginkább az jellemző, hogy a gazdasági ciklust (mozgást) egyfajta invariancia (megmaradási) elv keretében elemzi. Ezt a mozgást – konkrét esettől függően – létrehozhatja a rendszer szereplőinek alkalmazkodása valamilyen optimalizálás (nyereségmaximálás vagy ráfordításminimálás) közegében, de kialakíthatja a szereplők mindenféle szándékától teljesen függetlenül érvényre jutó piaci mozgás is. Bródy mindkét lehetőséget egyaránt vizsgálja, és variációs elvekre támaszkodó leírása mindkét esetben egyaránt alkalmas elemzési keretnek bizonyult. Ez az ábrázolás a variációs elvekkel és az első integrál létezésével hozza összefüggésbe a gazdasági rendszereket mozgató erők hatásának jellemzőit, a ciklikus mozgást eredményező tényezőket (*Bródy* [1997], [2000], [2002], [2007], *Bródy–Ábel* [2010]).

Ebben az írásban Bródy közgazdaságtanának egy szeletét tekintjük át, egy egyszerű és egységes keretbe foglalva Bródy sokirányú munkájának vissza-visszatérő motívumát, a gazdasági mozgás elméletét. Ez a vállalkozás szükségképpen leegyszerűsíti az eredeti gondolatok sokszínűségét, nem képes visszaadni Bródy gondolatainak gazdag elágazásait, további kutatási irányokat megnyitó perspektíváit.

[1] A módszer alkalmazására jó példa az energiamegtakarítást eredményező eljárások értékelése. A műszaki összehasonlítások gyakori hibája, hogy csak a közvetlen energiaigényt vetik össze, és az így adódó kisebb energiafelhasználással azonosítják a megtakarítást. Pedig általában igaz, hogy az alacsonyabb közvetlen energiafelhasználást lehetővé tevő technológia olyan berendezéseket használ, amelyek előállítása energiaigényes, arról nem is beszélve, hogy a berendezések előállításához felhasznált más termékek és szolgáltatások szintén energiát igényelnek, és így tovább, a termelési folyamat összes többi állomásán felhasznált energiát is figyelembe kellene venni az értékeléshez. Ezt az összetett értékelési eljárást teszi lehetővé az input-output módszer alkalmazása.

[2] *Kornai–Simonovits* [1981] alapos és kritikus könyvismertetése tágabb keretbe helyezi Bródy e fontos művét.

Bár az általunk itt bemutatott matematikai struktúra számos elemében egyszerűbb, mint amit Bródy maga alkalmazott, de ezt az egyszerűbb struktúrát úgy terjesztjük ki, hogy ha nagy vonalakban is, de átfogja a Bródy-féle elmélet minél több területét. Az írásunkban alkalmazott matematikai tárgyalás másik törekvése az, hogy a megoldáshoz szükséges matematikai szélsőérték-feltételeket is részletesen bemutassuk. Ezek teljesülése általában nem triviális, bár a feltételek közgazdasági tartalma szempontjából gyakran eleve teljesültnek feltételezhetők. Bródy kutatói módszerét két vonása alapján szokták elismeréssel értékelni. Az egyik a mély közgazdasági intuíció ereje, ami a matematikai tárgyalásmódját mindenhol jellemzi. A másik a matematika alkalmazásában megnyilvánuló ötletessége, ahogy a nehezen kezelhető bizonyításokat átvágja vagy mellőzi.[3] Számos kritikusa ugyanezeket a vonásait ostorozta. E két tábor vitája még nyilván eltart egy darabig. Cikkünk nem ehhez kíván hozzászólni. *Dobos* [2007] Bródy közgazdaságtanának matematikai konstrukcióit a matematika oldaláról vette górcső alá, és egészítette ki a modellek értelmezését a matematikai konstrukció által indokolt feltételek bemutatásával. Ezek a kiegészítések megerősítették Bródy eredeti konstrukcióit, és ebben az írásban is ezt a kibővített konstrukciót alkalmazzuk. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy ez a változtatás csak formailag tűnik kibővítésnek. A tárgyalás áttekinthetőbbé tétele érdekében helyenként leegyszerűsítve értelmezzük Bródy eredményeit, összevonva a nála elkülönülten közreadott eredményeket is.

Bródy gazdasági mozgásegyenleteinek leírásához kétféle típusú egyenleteket alkalmazunk. Az egyik egyenlettípus egy tevékenységi vagy technológiamérleg, amit lehet bizonyos megszorításokkal vállalati mérlegként is értelmezni. A technológiai vagy vállalati mérlegünk összeállításánál az időszak végi mérlegfőösszeget úgy határozzuk meg, hogy az időszak kezdőértékéhez hozzáadjuk az előző időszaki eszközök átértékeléséből származó „jövedelmet" (készletátértékelés), valamint a tevékenység időszaki nyereségét. A másik típusú egyenletek a termék piacán a kereslet és a kínálat összevetése szerinti ármeghatározásra vonatkoznak. Ezeket az összefüggéseket viszonylag egyszerű matematikai eszközökkel megragadni.

Először a matematikai leírást mutatjuk be, majd az így adódó differenciálegyenleteket elemezzük. Az ezt követő részben egy numerikus példán ismertetjük a probléma megoldását és a megoldás tulajdonságait. Foglalkozunk azzal, hogy miként alakulnak technológiai innováció esetén a gazdaság pályái, vagyis ha a technológiai együtthatók csökkennek – azaz milyen tovagyűrűző hatása van annak, ha egységnyi termék kibocsátásához kevesebb termékre van szükség, valamint ha az eszközigényesség változik. Mivel a mozgásegyenletek matematikai elemzése túl körülményes lenne, a szimulációs számításokból adódó pályák összehasonlításával elemezzük a gazdaság viselkedését. Végül összegezzük az eredményeket.

A modell leírása

Bródy gazdasági mozgáselméletének (gazdasági ciklus elméletének) bemutatásához keretül szolgáló modellben a következő jelöléseket alkalmazzuk:

a_i – az i-edik vállalat folyó ráfordítási vektora, oszlopvektor,

b_i – az i-edik vállalat eszközlekötési vektora, oszlopvektor,

[3] Bródy egyik nemzetközileg talán legismertebb eredménye az úgynevezett *Bródy-feltétel* megfogalmazása amely a Leontief-modell dinamikus inverzének létezését biztosítja (lásd *Bródy* [1974] 153. o., *Raa* [2010] 173. o.). E felfedezése jól szemlélteti munkamódszerét. Bródy lényegében a folyó ráfordítások A mátrixa és a tőke B mátrixa közötti közgazdasági összefüggést írja le amortizáció jellegű kapcsolat formájában. Ha e feltétel nem teljesül, a dinamikus inverz létezése nem garantált (szükséges feltétel), de Bródy ennek az összefüggésnek a matematikai bizonyításával már nem foglalkozik, és a róla elnevezett feltétel hatókörének feltérképezése is hidegen hagyja. Azt sem vizsgálja, hogy az általa megfogalmazott feltétel matematikai értelemben szükséges-e és/vagy elégséges-e. Megelégszik azzal, hogy az közgazdaságilag jól értelmezhető (indokolt), és matematikailag elfogadhatóan működik.

a_j^T – a j-edik piac vállalata ráfordítási együtthatóinak vektora, sorvektor,
b_j^T – a j-edik piac vállalatai eszközlekötési együtthatóinak vektora, sorvektor,
$x_i(t)$ – az i-edik vállalat nem negatív termelési szintje a t-edik időpontban,
$x(t)$ – gazdaság nem negatív termelési szintjének vektora a t-edik időpontban,
$p_j(t)$ – a j-edik termék nem negatív ára a t-edik időpontban,
$p(t)$ – a gazdaság nem negatív árvektora a t-edik időpontban.

Eszközlekötésen itt mindenféle állomány *(stock)* jellegű tényezőt, készletlekötést, állóeszköz-lekötést stb. értünk. A ráfordítási változókat is általánosan kell értelmezni, mindenféle áramlás *(flow)* jellegű tényező belefoglalható.

E jelölésekkel egy dinamikus Leontief-modellt szerkeszthetünk. Egyszerűsítés céljából tegyük fel, hogy minden egyes terméket egy tevékenység állít elő, és ezt egy erre kizárólagosan szakosodott vállalat testesíti meg. Hasonlóképpen tegyük fel, hogy minden terméknek van egy piaca ahol a felhasználók kereslete és a termékből rendelkezésre álló mennyiség meghatározza az árat. E feltételezés azt is jelenti, hogy lényegében a vizsgált gazdasági egység foglalja magában az adott termék termelésének és az elosztásának (forgalmazásának) teljes tevékenységét. Ezen belül nem vizsgáljuk, hogy ennek a bonyolult tevékenységnek a megszervezése milyen belső szervezeti egységekben történik, és milyen viselkedési szabályokat követ. Ez lehetne akár egyfajta szabad versenyre alapuló nyitott szervezet, de lehet monopolisztikusan zárt futószalagszerű falanx is. Az *egy termék–egy technológia* erős feltételezés, realitása vitatható, de közismert az is, hogy e feltételezés a tárgyalás egyszerűsítése miatt történik. Feloldására számos módszer alkalmazható lenne, de úgy ítéljük meg, hogy az ilyen irányú változtatások felesleges technikai bonyodalmakat okoznának. Példáinkkal az elméletet kívánjuk szemléltetni.

Ebben a felfogásban tehát minden egyes i-edik vállalat bruttó kibocsátása $x_i(t)$, amihez $a_i x_i(t)$ mennyiségű más (i-edik) termékeket (vagy szolgáltatást, egyszóval bármiféle *tevékenységet*) használ fel, amit az i-edik termék piacáról szerez be (ne feledjük, hogy az i index itt 1-től n-ig futó indexet jelöl, hiszen a_i oszlopvektort jelöl). A termelőkapacitások változtatásához ugyanakkor $b_i \dot{x}_i(t)$ termékmennyiséget kell beszereznie az i-edik termékből, és ezt a bővítés keretében lekötnie.

Tegyük fel azt is, hogy a termékek piacain (vagyis a *piacon*) kialakul minden időpontban egy $p(t)$ árrendszer. Az árak kialakulásának mechanizmusával itt csak érintőlegesen foglalkozunk, a modellből eredményként adódó árrendszer tehát a már említetthez hasonlóan többféle viselkedési vagy szervezeti jellemző végeredményeként is értelmezhető lenne. A modell csak az árak változási irányait befolyásoló tényezőket jeleníti meg a túlkereslet vagy a túlkínálat erői által mozgásba hozott alkalmazkodási folyamat keretében.

Mivel a technológiákat a vállalatokkal azonosítjuk, ezért feltehetjük, hogy rendelkeznek számviteli mérleggel. A mérlegben a vállalat rendelkezésére álló eszközöket szerepeltetjük minden időpontban. A vállalat vagyonát a rendelkezésre álló különféle vagyontárgyak, áruk és anyagok stb. összessége adja meg, amit az adott árrendszeren értékelünk: $p(t)b_i x_i(t)$.

A gazdaság mozgását két (egymással duális kapcsolatban lévő) szemléletben vizsgáljuk. A tevékenységre koncentráló szemlélet a tevékenység hozam- és ráfordításalapú mérését (értékelését) vizsgálja, míg a piacra koncentráló szemlélet a keresleti és kínálati viszonyoknak a termékértékelésre (mérésre) gyakorolt hatásait elemzi.

A tevékenység mérése (értékelése) hozam és ráfordítás alapján

A vállalati vagyon értéke a termelés eredményeként megváltozik. A megtermelt termék azonnal vagyontárggyá válik, növeli a készletet [$p(t)x_i(t)$], a termeléshez felhasznált áruk megsemmisülnek [$p(t)a_i x_i(t)$], vagyis csökkentik egy időpontban a vállalat vagyonát. E két tétel különbsége, vagyis a vagyonváltozás a vállalat nyeresége adott árrendszerben mérve: $p(t)x_i(t) - p(t)a_i x_i(t)$. Mivel az árak is változhatnak, ezért az árváltozás is befolyásolja a vagyon nagyságát (és változását). Ha az árak emelkednek, az a számviteli vagyont növeli, míg az árcsökkenés csökkenti azt. E változást jelöli: $\dot{p}(t)b_i x_i(t)$. E vagyonváltozási tényezők összegzéseként adódik a következő egyenlet [pontosabban egyenletek (i = 1, 2, …, n). termékekre/technológiákra]:

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)b_i x_i(t)\right] = \left[p_i(t)x_i(t) - p(t)a_i x_i(t)\right] + \dot{p}(t)b_i x_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebből átalakítás után kapjuk a következő egyenleteket

$$p(t)b_i\dot{x}_i(t) = p_i(t)x_i(t) - p(t)a_i x_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezeket az egyenleteket átrendezve, a következő differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{p_i(t) - p(t)a_i}{p(t)b_i}x_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Az (1) alakú egyenletek azt fejezik ki, hogy az adott termék termelési szintje, vagyis a vállalat termékének kínálata lineárisan növekszik, és a pillanatnyi növekedési ütem, vagyis $\frac{p_i(t) - p(t)a_i}{p(t)b_i}$ nem más, mint az egységnyi vagyonértékre jutó nyereség. *A termék kínálatának változási ütemét az adott árakon mért profitráta határozza meg.*

A termék értékelése (mérése) a piacon a kereslet és a kínálat összevetésében.

Most a termelés (tevékenység) helyett a termék piacára fordítjuk a figyelmünket. A piacon a kereslet és a kínálat az áralakulás meghatározói. Vegyük a j-edik piacon lévő terméktömeg értékösszegét meghatározó tényezőket.

A gazdaságban a j-edik termék iránti kereslet két fő elemből tevődik össze. Egyrészt a folyó ráfordítások, azaz a termelőfelhasználás $p_j(t)a_j^T x(t)$ mennyiséget igényel. Ezen túlmenően a termelés bővítése további $p_j(t)b_j^T\dot{x}(t)$ mennyiséget igényel (vagy szabadít fel, amennyiben nem bővül, hanem szűkül a tevékenység). E kereslettel szemben kínálatként a piacon $p_j(t)x_i(t)$ mennyiség áll szemben. Ha a pillanatnyi kereslet meghaladja a pillanatnyi kínálatot, akkor ez az adott termék árának emelkedésével egyensúlyozódik ki. Az áralkalmazkodással együtt az adott termékből a gazdaság különféle tevékenységeiben (vállalataiban) lekötött vagyon is változik (az egyenlet bal oldalán) a következő összefüggés szerint:

$$\frac{d}{dt}\left[p_j(t)b_j^T x(t)\right] = p_j(t)a_j^T x(t) + p_j(t)b_j^T\dot{x}(t) - p_j(t)x_j(t). \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$\dot{p}_j(t)b_j^T x(t) = -p_j(t)x_j(t) + p_j(t)a_j^T x(t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

amiből a következő differenciálegyenletek állnak elő

$$\dot{p}_j(t) = -\frac{x_j(t) - a_j^T x(t)}{b_j^T x(t)}p_j(t). \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

A (2) rendszerben az árváltozást – a $-\frac{x_j(t) - a_j^T x(t)}{b_j^T x(t)}$ hányados vezérli, ami az egységnyi tőkelekötésre jutó többletterméket jelöli. *Az árak csökkenésének üteme megegyezik a többlettermék/tőkelekötés hányadossal.*

Ezzel a két részből álló (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszerrel lehet tehát leírni a gazdaság működését. A tevékenységek ráfordítási és hozamjellemzői alakítják az aktivitási szintek dinamikáját az (1) összefüggés szerint, a piacon a kereslet és kínálat eltérése pedig az árak változását szabályozza a (2) szerint. Ebben a gazdaságban tehát van $2n$ darab ismeretlenünk, vagyis a termelési szintek és az árak, valamint ugyanennyi egyenletünk, így a differenciálegyenlet-rendszer egyértelműen megoldható. E felírás általánosabb keretbe foglalja a *Bródy* [1980] által javasolt ciklusmodellt, és nagy hasonlóságot mutat a Goodwin-modellel (*Goodwin* [1967]).

Bródy modellje

Bródy modellje az (1)–(2) differenciálegyenletek egy egyensúlyi vagy alapmegoldásának tekinthető. Ezt a következőkben mutatjuk be. Bródy modellje a (3) és (4) sajátérték-feladattal ekvivalens:

$$x = Ax + \lambda Bx, \tag{3}$$

és

$$p = pA + \lambda pB, \tag{4}$$

ahol az A és B mátrixok az előző részben használt termelőfelhasználás és a tőkelekötés együtthatóit adják meg mátrixalakban. A (3) és (4) sajátérték feladatok megegyeznek a korábban már *Bródy* [1974] által kiterjedten vizsgáltakkal, de szinguláris B mátrix esetén is létezik a (3)–(4) rendszernek megoldása (lásd *Dobos* [2007]). Tegyük fel, hogy létezik a (3)–(4) rendszereknek pozitív (λ_0, x_0, p_0) megoldása. Ezt garantálja például, ha feltételezzük, hogy az A mátrixnak létezik nem negatív Leontief-inverze. Ekkor a

$$\frac{1}{\lambda} x = \left(I - A\right)^{-1} Bx$$

sajátérték-feladatra lehet visszavezetni a (3) rendszert, és a Perron–Frobenius-tételek miatt létezik a nem negatív sajátérték és sajátvektor (*Krekó* [1976]).

A (3)–(4) alakban felírt Bródy-modell tehát az (1)–(2) differenciálegyenletekkel felírt modell egy speciális esete, amikor a gazdaság kiegyensúlyozott és állandó növekedési pályán halad (Neumann-sugár).

Most térjünk vissza az (1)–(2) alakban felírt modell viselkedési jellemzőinek bemutatásához!

A modell néhány tulajdonsága

Az (1) és (2) típusú differenciálegyenletek explicit megoldása analitikusan lehetetlen, ezért a továbbiakban inkább a numerikus megoldásból próbálunk néhány tulajdonságot levonni. Mindezekkel együtt azonban triviális esetben az egyenletrendszer megoldása megadható. Először a modell triviális megoldásait foglaljuk össze.

1. TULAJDONSÁG. *Speciális esetként a dinamikus Leontief-modell adódik.*

A modell nem negatív megoldása: $x(t) = e^{\lambda_0 t} x_0$ és $p(t) = e^{-\lambda_0 t} p_0$, ha a differenciálegyenlet-rendszer kezdeti értéke a (3)–(4) sajátérték feladat nem negatív megoldása, ahol a kezdeti érték

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

A tulajdonság belátása nem okoz nehézséget. Helyettesítsük a javasolt megoldást az (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszerbe. Mivel az exponenciális kifejezéssel egyszerűsíteni lehet, és a sajátérték feladatot kapjuk vissza, ezért az állítás teljesül.

A tulajdonság arra utal, hogy ebben a speciális esetben az (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszer megoldása lényegében megegyezik a lineáris

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) \tag{5}$$

és

$$p(t) = p(t)A - \dot{p}(t)B \tag{6}$$

differenciálegyenlet-rendszer nem negatív megoldásaival, vagyis a klasszikus dinamikus Leontief-modellel.

2. TULAJDONSÁG. *Az általános megoldás pozitív.*

Az (1)–(2) rendszer megoldása pozitív, ha a kezdeti értékek a mennyiségekre és árakra pozitívak.

Itt lényeges megszorítás, hogy a kezdeti értékeknek pozitívaknak kell lenniük. A tulajdonság belátásához írjuk fel az egyszerűség kedvéért az i-edik mennyiségre az (1) differenciálegyenletet a következő formában:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = \frac{p_i(t) - p(t)a_i}{p(t)b_i}.$$

Ennek a megoldásához a következő egyenlőség segít hozzá

$$d\,\frac{\ln[x_i(t)]}{dt} = \frac{p_i(t) - p(t)a_i}{p(t)b_i},$$

vagyis a megoldás

$$x_i(t) = x_i(0)e^{\int_0^t \frac{p_i(\tau) - p(\tau)a_i}{p(\tau)b_i}d\tau}.$$

Innen pedig következik, hogy a megoldás pozitív, mivel az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vehet fel.

A többi tulajdonságot analitikusan nem lehet bizonyítani, ezért a numerikus megoldást hívjuk segítségül. A megoldást a MathCad programcsomag alkalmazásával állítottuk elő. A továbbiakban feltételezzük, hogy a probléma kezdeti értéke nem fekszik az egyensúlyi arányos pályán, azaz a Neumann-sugáron.

A termelőfelhasználás A mátrixát, és a készletigényesség B mátrixát az alábbi 3 × 3-as mátrixok reprezentálják:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,03 & 0,02 \\ 0,05 & 0,02 & 0,04 \\ 0,07 & 0,06 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

A kezdeti értékek a mennyiségre és árra:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \qquad p(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

A rendszerünk egyensúlyi arányos pályája (Neumann-sugár):

$$x^N(t) = \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,612 \\ 0,696 \end{bmatrix} e^{0,404t}, \qquad p^N(t) = \begin{bmatrix} 0,493 \\ 0,554 \\ 0,671 \end{bmatrix} e^{-0,404t},$$

ahol az egyensúlyi növekedés üteme $\lambda_0 = 0{,}404$, és az egyensúlyi termelés szintjének vektora és az árvektor:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,612 \\ 0,696 \end{bmatrix}, \qquad p_0 = \begin{bmatrix} 0,493 \\ 0,554 \\ 0,671 \end{bmatrix}.$$

Ez utóbbiak a megoldásai a (3)–(4) sajátérték feladatnak. Számításainkban a megoldást hároméves tervezési horizontra állítottuk elő, azaz $t \in [0, T]$, ahol $T = 3$.

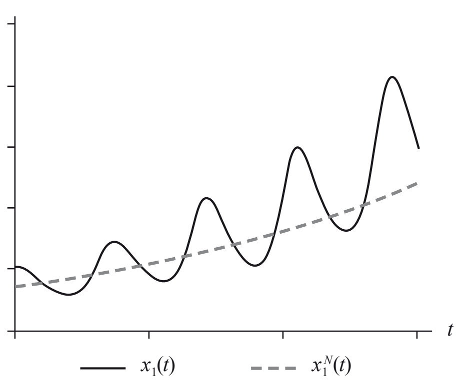
Oldjuk meg numerikusan az (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszert a (7) kezdeti értékek mellett. A megoldást nem mutatjuk meg a teljes termelési szintre és az árrendszerre, csak az első terméket választottuk ki [$x_1(t)$]. Ennek az az oka, hogy a többi termékre is hasonló görbéket kapunk megoldásként. Az *1. ábrán* a folytonos vonal az első termék termelési szintjének pályáját mutatja.

Az ábrán szaggatott vonallal jelöltük az (5) dinamikus Leontief-modell megoldását a (7) kezdeti érték mellett $\left[x_1^N(t)\right]$. A szaggatott vonal tehát az első terméknek a Neumann-sugár mentén adódó pályáját mutatja. Szembeötlő, hogy az ábrán folytonos vonallal jelzett (a nem egyensúlyi kiindulásból kapott) megoldás által leírt ciklikus pálya közepe nem a Neumann-sugár, hanem annál gyorsabb átlagos növekedést mutat.

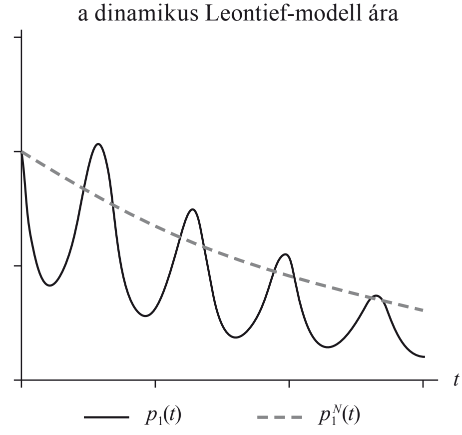
A *2. ábrán* az árak mozgását mutatjuk be.

A szaggatott vonal ebben az esetben is a dinamikus Leontief-modell ármegoldását mutatja, amit $p_1^N(t)$ jelöl, míg $p_1(t)$ első vállalat ára, amely a (6) differenciálegyenlet-rendszer megoldásaként adódik. Az *1.* és *2. ábra* alapján megállapíthatjuk, hogy az (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszer megoldása a Neumann-sugár mentén ciklikus mozgást végez. Ezt a 3. tulajdonságban mondjuk ki.

1. ábra
Az első termék termelési szintje és
a dinamikus Leontief-modell megoldása



2. ábra
Az első termék ármozgása és
a dinamikus Leontief-modell ára



3. TULAJDONSÁG. *A mozgás, ha a Neumann-sugárnak megfelelő pályától eltér, ciklikus.*

Az (1)–(2) egyenletekkel leírt gazdaság *ciklikus* mozgást végez a termelési szintek és az árak tekintetében is, amennyiben nem a Neumann-sugárnak megfelelő egyenletes növekedési pályáról indul (és azon is marad) a gazdaság.

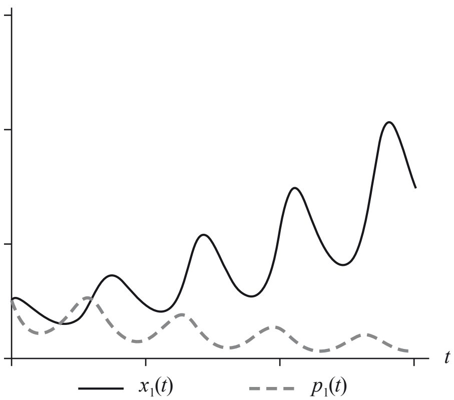
Ezt a tulajdonságot nehéz bizonyítani, de a szimulációk alátámasztják. A pálya, amelyet befut a gazdaság, nem stabil, nem tart a Neumann-sugárhoz. Az árak, mivel csökkenek, igen, azonban a termelési szintek egyre nagyobb amplitúdóval lengenek ki az egyensúlyi arányos pálya mentén.

Két kérdést teszünk még fel, amelyet számpéldánkra támaszkodva válaszolhatunk meg. Az egyik kérdés az ár- és a termelési ciklus szinkronitásával kapcsolatos. Egy tevékenység vagy vállalat pályáját tekintve, az árak és a termelési mennyiségek azonos ciklust futnak-e be, vagy késleltetés van közöttük? A másik kérdés az egyes tevékenységek/vállalatok ciklusainak együttmozgására vonatkozik. A vállalatok azonos ciklusban mozognak-e, egyszerre nőnek és csökkenek, vagy van közöttük fáziskésés?

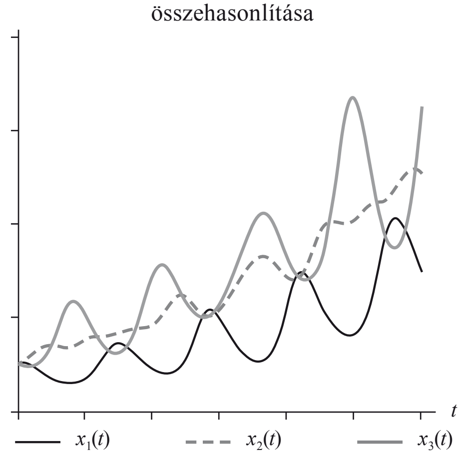
Az első kérdésre a választ a *3. ábra* segítségével szemléltetjük. Elegendő csak egy vállalatot kiválasztanunk az elemzéshez, mert a többi vállalat pályája is hasonló görbét ír le. Az ábrán látható, hogy interferencia van az árak és termelési mennyiségek között. Az árváltozást követi a termelési mennyiségek változása. Itt a változást a lokális maximumok és minimumok egymásutániságaként ragadhatjuk meg.

A második feltett kérdésre a választ a *4. ábra* vizsgálatával válaszolhatjuk meg. Az árak összevetése hasonló képet mutatna, ezért most annak a bemutatásától eltekintünk. Az ábrán az látható, hogy két vállalatnál a ciklus teljesen ellentétesen alakul, de úgy, hogy a ciklusok csúcspontjai egybeesnek. A harmadik vállalat hol az egyik, hol a másik vállalat növekedési ciklusát követi.

3. ábra
Egy vállalat árainak és termelési mennyiségeinek összevetése



4. ábra
A gazdaság termelési szintjeinek összehasonlítása



A két kérdésre adott választ a következő tulajdonságban foglalhatjuk össze.

4. TULAJDONSÁG. *A ciklikus jellegű árváltozást fáziskéséssel követi a termelés ciklikus alakulása.*

A gazdasági ciklusokban a vállalatok árváltozását késéssel követi a termelési mennyiségek változása. A termelési szintek ciklikus változása során bizonyos vállalatok éppen ellentétes trendet követnek, míg vannak vállalatok, amelyek mindkét ciklikus változáshoz alkalmazkodnak.

Ezzel összefoglaltuk az (1)–(2) differenciálegyenlet-rendszer megoldásának legfontosabb tulajdonságait. A következő részben azzal foglalkozunk, hogyan alakul a gazdaság mozgása, ha a technológia úgy változik, hogy a termelő felhasználás és a tőkelekötés együtthatói megváltoznak.

A gazdaság mozgásjellemzőinek módosulása technológiaváltozás esetén

A következőkben két esetet fogunk megkülönböztetni:

1. innováció során csökken az egységnyi folyó ráfordítás mennyisége: $a_{ij} > a'_{ij}$,
2. a technikai fejlődés miatt növekszik az eszközlekötési igény: $b_{ij} < b'_{ij}$,

ahol a vesszővel jelölt mennyiség az innováció után előálló új együtthatókat jelöli. Először az első esetet vizsgáljuk.

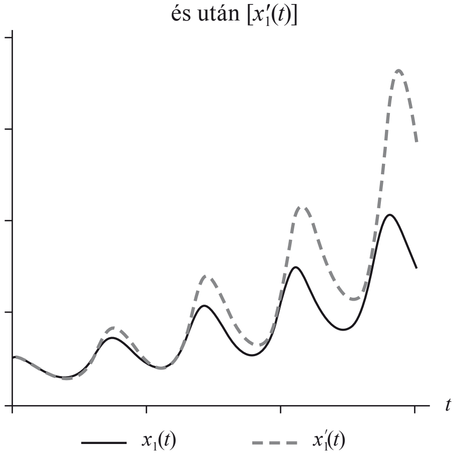
A továbbiakban a termelő felhasználások A' mátrixát és a készletigényesség B' mátrixát az alábbi 3 × 3-as mátrixok reprezentálják:

$$A' = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3-0{,}05 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}03+0{,}01 & 0{,}02 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}04 \\ 0{,}07 & 0{,}06 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

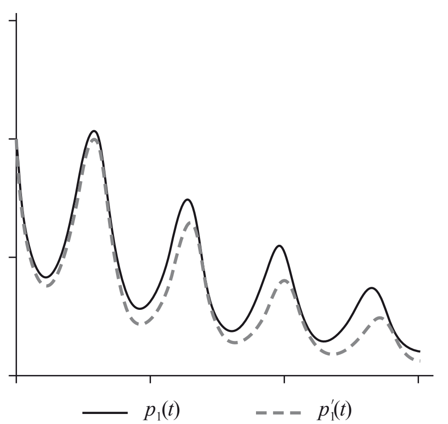
Amint látjuk, csak az a_{12} és b_{12} értékeket változtattuk meg a korábbiakhoz képest, és a kezdeti értéket is változatlannak hagytuk.

Ebben az esetben is csak az első terméket és annak árát mutatjuk be, mert a többi termékre és árára hasonló görbét kapunk. A változást az *5.* és *6. ábra* szemlélteti. Az ábrákon x'-vel jelöltük az új termelési szinteket és p'-vel az új árakat.

5. ábra
A termelési szintek az innováció előtt $[x_1(t)]$ és után $[x'_1(t)]$



6. ábra
Az árak az innováció előtt $[p_1(t)]$ és után $[p'_1(t)]$



Az *5. ábrán* a szaggatott vonal jelöli a termelési szintek új pályáját, amit esetünkben $x'_1(t)$ jelöl. Ebből azonnal látjuk, hogy a ráfordításigényesség csökkenése növeli a kibocsátás mennyiségét, és a ciklus csúcspontja is eltolódnak.

Az árváltozást a *6. ábra* mutatja. A szaggatott vonal ebben az esetben is az innováció utáni $p'_1(t)$ árakat mutatja. Megállapítható, hogy az ár – a termelési szintekkel ellentétben – csökken, de ebben az esetben is egy kisebb késleltetés figyelhető meg a ciklus alakulásában.

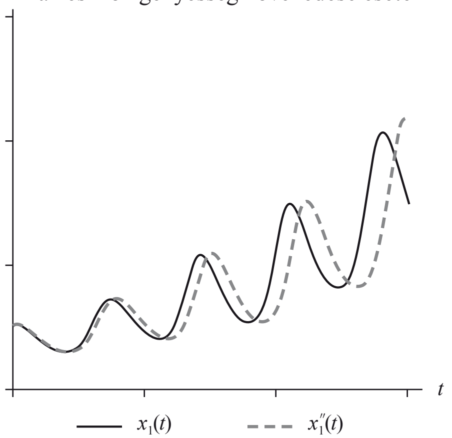
Eredményünket a következőkben foglalhatjuk össze.

5. TULAJDONSÁG. *A ráfordítási fajlagos csökkenése az ár csökkenését és a termelési szint növekedését eredményezi.*

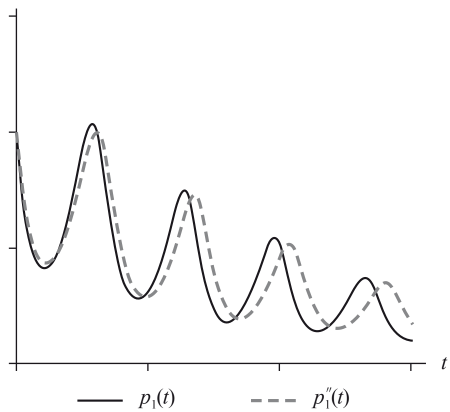
A ráfordításigényesség csökkenése után a termelési szintek növekednek, míg az árak csökkennek. Az új termelési szintek és árak, ha késéssel is, de követik a megelőző ciklusokat.

Végül az eszközlekötés-igényesség növekedésének hatását foglaljuk össze a ciklusra nézve. Az eszközigényesség növekedését azért tételeztük fel, mert a fejlett ipari országokban és Magyarországon is ez a tendencia figyelhető meg tömegesen. A változásokat a *7.* és *8. ábrán* szemléltetjük.

7. ábra
A termelési szintek változása
az eszközigényesség növekedése esetén



8. ábra
Az árak változása
az eszközigényesség növekedése esetén



A *7. ábrán* a termelési szintekre gyakorolt hatást mutatjuk be. A szaggatott vonal ekkor is az innováció utáni $x_1''(t)$ kibocsátást mutatja. Ebben az esetben, eltérően a ráfordításigényesség csökkenésétől, a régihez képest nem állapítható meg növekedés és csökkenés. Ami viszont feltűnik, az az, hogy a ciklus az innováció után eltolódik, azaz a ciklus hossza növekszik. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy a nagyobb befektetések megtérülése is hosszabb időszakot igényel.

A *8. ábrán* az innováció árakra kifejtett hatását szemléltetjük. Itt is a szaggatott vonal jelzi az innováció utáni helyzetet, amikor az új ár $p_1''(t)$. Amit a termelési mennyiségekre is megállapítottunk, azt az árakra is megismételhetjük. A mennyiséggel együtt mozognak az árak, és ez a ciklus hosszának növekedésével jár.

Eredményünket az utolsó, 6. tulajdonságban foglaljuk össze.

6. TULAJDONSÁG. *Az eszközigényesség növekedésével az üzleti ciklusok hossza késleltetéssel megnövekszik.*

Összefoglalás és további kutatási irányok

A Leontief-típusú gazdaság egy általánosabb alakjának egyszerű felírásából indultunk ki, amelybe jól beleilleszthető Bródy András cikluselmélete. A gazdasági ciklus viselkedési jellemzőit egyszerű számpéldán szemléltettük, mivel a Bródy-féle differenciálegyenlet-rendszer analitikusan nem vizsgálható.

A modell egyik megoldása az egyensúlyi arányos pályát, vagyis a Neumann-sugarat adja vissza, ha az egyenletrendszer kezdeti értéke a sugáron fekszik. Ekkor tehát az itt vizsgált nem lineáris differenciálegyenlet-rendszer a klasszikus dinamikus Leontief-modellhez vezet. Ha nem az egyensúlyból indul a rendszer, akkor a termelési szintek és árak ciklikus mozgást végeznek a Neumann-sugár mentén, de a ciklus amplitúdója növekvő. A különböző tevékenységek (vállalatok) üzleti ciklusa eltér egymástól. Bizonyos tevékenységek teljesen ellentétes ciklusban vannak, míg mások alkalmazkodnak a különböző eltérő mozgású ciklusokhoz. Megállapítható, hogy az ilyen rendszereknek a ciklus természetes velejárója.

Az innováció két típusát vizsgáltuk az adott gazdasági rendszerben. A ráfordításigényesség csökkenése esetén növekszik a kibocsátás, az árak csökkennek, és a ciklus kissé eltolódik. Ha az innováció az eszközigényesség növekedésében testesül meg, akkor a termelési szintek és az árak ciklusai is megnövekszenek, tehát egy bizonyos késleltetés lép fel a gazdaságban.

Számos további kutatási irány adódik elemzésünk természetes folytatásaként. Ezek közül az egyik az itt pusztán szemléltetett ciklikus mozgás ciklusjellemzőinek feltérképezése. Itt nem foglalkoztunk a ciklusok frekvenciajellemzőivel, a ciklushosszakkal és más fontos jellemzőjével sem. A mozgás a Neumann-sugártól eltérve ingadozást mutat, a Neumann-sugár értelmében vett egyensúlyhoz azonban nem tér vissza. Bár akörül ingadozik, magának az ingadozásnak a közepe nem a Neumann-sugár. A ciklusjellemzőkkel Bródy sokat foglalkozott, elemzésének fő eszközeit jelentették ezen a területen a dinamikus Leontief-modell sajátértékei és az ezzel rokonságban lévő hullámmátrix (*Bródy* [2000]).

Egy másik elméletei lehetőség az úgynevezett hamiltoniánus alakból kiindulva, az (1)–(2) rendszer keretbe foglalása, és levezetve valamiféle megmaradási elvek felállításával. Ez a gondolat is számos helyen megjelenik Bródy munkáiban (például *Bródy* [2004]-ben).

Harmadik reménybeli továbblépési irányként empirikus alkalmazásokat említenénk, de még ezzel sem lépnénk ki Bródy gazdaságtanának és munkáinak gondolatvilágából, hiszen ő mindig is törekedett arra, hogy elméleti konstrukcióit a valóságos gazdaságok reális jellemzőihez kalibrálja.

Hivatkozások

Baumol, W. J.–Raa, T. T. [2009]: Wassily Leontief: In Appreciation. The European Journal of the History of Economic Thought, 16. 511–522. o.

Bródy András–Ábel István [2010]: Amends of An Old Feud. Goodwin's Flair for the Law of Conservation. Acta Oeconomica, 60. 127–141. o.

Bródy András [1969]: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Bródy András [1974]: Proportions, prices and planning. Akadémiai Kiadó, North Holland, Budapest–Amszterdam.

Bródy András [1980]: Ciklus és szabályozás. Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Bródy András [1997]: A piac és az egyensúly: A neumanni és kvázi-hamiltoni rendszer. Közgazdasági Szemle, 46. évf. 7–8. sz. 738–756. o.

Bródy András [2000]: A wave matrix. Structural Change and Economic Dynamics, 11. 157–166. o.

Bródy András [2002]: Bevezetés a mozgáselméletbe. Közgazdasági Szemle, 49. évf. 2. sz. 93–104. o.

Bródy András [2004]: Near Equilibrium: A Research report on Cyclic Growth. Aula, Budapest.

Bródy András [2007]: A ciklus oka és hatása. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 10. sz. 903–914. o.

Dobos Imre [2007]: Egy megjegyzés Bródy András: Leontief zárt dinamikus modellje című dolgozathoz. Közgazdasági Szemle, 54. évf. 11. sz. 1004–1011. o.

Goodwin, R. M. [1967]: A Growth Cycle. Megjelent: *Feinstein, C. H.* (szerk.): Socialism, Capitalism and Economic Growth. Cambridge University Press, 54–58. o.

Kornai János–Simonovits András [1981]: Bródy András: Ciklus és szabályozás. Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására. Könyvismertetés. Közgazdasági Szemle, 1. sz. 115–120. o.

Krekó Béla [1976]: Lienáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Raa, T. T. [2005]: The economics of input-output analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Raa, T. T. [2010]: Bródy's Capital. Megjelent: *Raa, T. T.* (szerk.): Input-Output Economics: Theory and Applications, Featuring Asian Economies. World Scientific, New Jersey–London–Szingapúr.

Raa, T. T. [2010]: Input-Output Economics: Theory and Applications. Featuring Asian economies. World Scientific, New Jersey–London–Szingapúr.