

## Bródy András és a dualitás matematikai elmélete

### A gazdasági növekedés Neumann-modellje

A dolgozat megírására két váratlan esemény egyidejű bekövetkezése ösztönzött. Az első nagy öröömre szolgált, a második azonban nagy szomorúsággal tölt el. Az örömteli és megtisztelő esemény Zalai Ernő felkérése volt arra, hogy véleményezzem a Közgazdasági Szemlében megjelent kiváló, a Neumann-moddellel foglalkozó dolgozatát. Mivel a Zalai Ernő által vezetett kutatások kapcsán a témával én is foglalkoztam korábban, a felkérésnek, amint tudtam, eleget tettem. A dolgozat olvasása közben kaptam a hírt: Bródy András immáron nincsen közöttünk. A váratlan és tragikus hír azért is megrázó volt, mert Zalai Ernő dolgozata éppen azokat a kérdéseket feszegette, amelyeket először Bródy András vetett fel, és amelyek kiváló és máig páratlanul szellemes vizsgálatával közel harminc évvel ezelőtt Bródy András engem is a téma tanulmányozására inspirált.

### Miért a Neumann-modell?

A Neumann-modell (1938/45) kapcsán felmerülő első és leginkább kézenfekvő kérdés az, hogy miért foglalkozunk még mindig ezzel a meglehetősen egyszerű modellel? Mi indokolja, hogy a modell iránt az érdeklődés nem lankad? Ennek számos oka van – a dolgozat elején ezeket próbálok számba venni.

Ezek közül az első, talán nem a legfontosabb, de valószínűleg mégis szerepet játszó, éppen *Neumann személye*. Neumann János minden kétséget kizáró módon az elmúlt évszázad egyik legjelentősebb gondolkodója volt. Tevékenysége a matematika számos területére kiterjedt, elejtett megjegyzéseiből kutatási iskolák nőtték ki. Viszonylag rövid élete során ontotta a matematikai eredményeket, és végtelennek látszó tehetségéből tellett a többi tudományra is, többek között a közgazdaságtanra. A közgazdász-társadalom máig igen hálás ezért a figyelemért, és talán túlzó módon is dokumentálja a „mester” minden megjegyzését, és még esetleges félreértéseit és tévedéseit is a zsenialitás jelének tekinti. Ennek egyszerű oka van: érdemes megmutatkozni a Neumann körül méltán kialakult dicsfényben.

De mi vezette Neumannt arra, hogy a modellt megalkossa? A kérdésre értelemszerűen nincsen biztos válasz, de azt hiszem, bizonyos magyarázat azért mégis adható: Neumann kora a modern tudomány aranykora. Erre az időszakra esik, amikor a társadalom felismeri, hogy a tudományban rejlő erőket a lehető legközvetlenebbül a maga hasznára képes fordítani. Beindul a tudományos termelés iparága, de a tömegtermelés jelei még nem mutatkoznak. Viszonylag széles a pálya, lehet aratni. Az aratógép által visszahagyott szemeket majd csak a következő nemzedéknek kell szívós munkával összegyűjteni. A tudomány ekkor igen bizakodó. Az általános optimista vélekedést David Hilbert, Neumann szintén óriás pályatársa nevezetes kijelentésével foglalhatjuk össze: „amire kíváncsiak vagyunk, meg fogjuk tudni”. Nem kis mértékben éppen Neumann eredményei tették lehetővé, hogy a kor kutatói bonyolultnak látszó kérdésekre egyszerű matematikai modelleket építsenek. Ha ez a módszer ment a fizikában, miért ne működne a közgazdaságtanban?

Ezzel el is érkeztünk a modell másik vonzó tulajdonságához: *a modell egyszerű*. Ez az egyszerűség valószínűleg tudatos volt. Miként a tudomány más területein is, a bonyolultnak látszó kérdésekre a közgazdaságtanban is kell lenni egyszerű és világos magyarázatoknak. Feltehetően Neumann nem volt tisztában a közgazdaságtan legnagyobb problémájával, nevezetesen azzal, hogy szemben a természettudományokkal, a társadalomtudományokban a rendszer lényegében nem bontható fel független elemekre. A közgazdaságtanban minden valóban mindennel összefügg. És ezért a problémák komplexitása rendkívüli, és a lényeg elsikkadása nélkül a rész nem választható el az egésztől. De mindez Neumannt valószínűleg nem érdekelte. A matematikai modell legyen egyszerű és nagyszerű. Ugyanakkor a modellt Neumann azért bonyolultabbnak gondolta, mint amilyen az valójában volt. Kár ezt tagadni, és a mestert utólag igazolni. Közismert, hogy Neumann – mint egy szórakozott kapus a potyagólt – „benézte” modelljét. Nehezebb matematikai problémának gondolta, mint az valójában volt. Neumann eredeti dolgozata, amelyet egyébként Bródy András fordított magyarrá, mintapéldánya az olvashatatlan dolgozatnak. A dolgozat azonban mégis mérföldkő, ugyanis az alapvető tévedés miatt Neumann belátja a Neumann-féle fixpönttételt, amely később az egyensúlyelmélet kezében a matematikai közgazdaságtan első számú fegyvere lesz. Az úgynevezett Kakutani-féle fixpönttétel nem más, mint az ugyancsak nem jelentéktelen matematikus, Kakutani kísérlete a dolgozat lényegének kihámozására. A modellt végül *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] némiképpen átalakítja, és ezzel jelentősen leegyszerűsíti. Kétségtelen, hogy a módosított verzióban az egyensúlyi növekedési ütem nem egyértelmű, de ennek az az oka, hogy a módosított modell jobb, gazdagabb és főleg lényegre törőbb. A *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] a modellt a helyére teszi, vagyis megmutatja, hogy valójában csak egy dualitási tételről van szó, és nem egy fixpönttételről. A módosítás lényege: a szerzők bemutatják, hogy a kor divatos fegyvere, a lineáris programozás dualitási tételei segítségével a Neumann-modell megoldható. Ezzel a modellt a nagyközönség – az egyetemi tankönyvek – számára is elérhetővé teszik, és ott helyezik el, ahová az való: a lineáris közgazdasági modellek közé. Ez vezet át minket a Neumann-modell talán legnagyobb érdeméhez, a modell elméleti közgazdasági felhasználásához.

### Marx Bródy-féle interpretációja és a Neumann-modell

Bródy András kutatói életpályájának kiemelkedő része volt, amikor Marx közgazdasági gondolatait a modern dualitás elmélet keretébe ágyazva mintaszerűen elemezte. Az elemzés annyira sikeres volt, hogy ma Marx elméletének lényegét a hazai közgazdászok többsége Bródy interpretációjával azonosítja. A modell kidolgozásakor Bródyt, tudomásom szerint, sokan azzal támadták, hogy Marx gondolatait túlegyszerűsíti, és ezzel eltorzítja. Azt gondolom, a kritikusoknak részben igazuk volt. De csak részben. A Bródy-féle interpretáció ugyanis kiemelte a gondolat, az elmélet lényegét. Minden jó matematikai gondolat a lényeg megértésére tör. Le kell hámozni a sallangokat, és ki kell emelni a logikai alapot, amire a gondolatrendszer épül. Gyakran felvetődik, hogy mennyi matematikára van szükség a közgazdaságtanban? Mennyiben felelős a matematika, a módszertan elburjánzása a közgazdaságtan talajvesztéséért? Ezt a kérdést Bródy kritikusai is felvetették. Bródy válasza erre a rá jellemző szellemes lényeglátásból fakadó rövid csipős válasz volt: Mindenki számára annyi matematika használható, amennyit felfogni képes, amit nem, az már szükségtelen. Azt, hogy a matematika képes egy közgazdasági elméletet letisztázni, és ezzel új mélységeit feltárni, erre az egyik legjobb példát éppen Bródy András szolgáltatta. Ha a mély és alapos közgazdasági ismeret matematikai készséggel párosul, és ehhez még tehetség, eredendő szellemesség és jó ízlés is megadatik, akkor a közgazdaságtan a matematika által nem elkorcsosul, hanem letisztul.

Természetesen szép szobrot csak szép márványból lehet faragni. Bródy esetében a szép márvány a dualitás matematikai elmélete volt. Matematikailag a dualitás lényege, hogy két különböző feladat szoros kapcsolatára hivatkozunk. A primális és a duális feladat egyszerre oldja meg a két feladat mögött levő közös problémát. Pusztán a matematikai célszerűség határozza meg, hogy melyik feladatot tekintjük primálisnak és melyiket duálisnak. Amikor a dualitás elméletét ráhúzzuk egy közgazdasági problémára, a probléma közgazdasági tartalma egy kicsit biztosan megváltozik. Mint ahogyan akkor is megváltozik, ha Ady Endrét olaszul próbáljuk elmondani. Bródy értelmezésében a termelési oldal a primális oldal, a pénzügyi oldal a duális oldal. Ebben az értelmezésben a pénzügyi oldalnak, az ármodellnek, a jövedelemelosztásnak nincs önálló mozgásteret. Egyszerűen a termelési oldal duálisa, tükröképe. A mai pénzügyi válság kapcsán gyakran elhangzik, hogy a pénzügyi oldal szerepe túlzottan megnőtt a termelési oldal rovására. Ez az elképzelés mélyen a Bródy-féle interpretációban gyökerezik. Az, hogy a két oldal külön van, és szembeáll, éppen a dualitás szemlélete. A duális párban az egyik feladat megváltozása egyensúlytalanságot okoz és ez magával rántja a duális pár másik felét. Ez éppen a Neumann-modell, illetve a lineáris közgazdasági modellek lényege. Marx alapvetően a termelésből, a technológiai adottságokból vezette le a társadalmi berendezkedést. Mindig hangsúlyozta, hogy az alap a termelési mód, erre épülnek a termelési viszonyok. Bródynál a termelési mód a modell konstansai, illetve az ebből származó és ezt tükröző primális oldal, a termelési viszonyok a duális oldal. A dualitás a két oldal dialektikus viszonya.

A közgazdasági gondolatok jelentős része metafora. Szemben a természettudományokkal, a társadalomtudományokban a valóság illúzió. A személyes tapasztalat és a józan ész igen korlátozott, és nagyrészt a társadalmi helyzet által determinált. Nemcsak a gazdaságról alkotott képünk elméletfüggő, hanem a gazdasági folyamatok maguk is függenek az őket leíró elmélettől. A gazdaság tele van önmegvalósító proféciákkal. Ezért nem mindegy, hogy mi az uralkodó közgazdasági elmélet. A közgazdasági elméletek körül kibontakozó vita mindig is a gazdasági folyamatok befolyásolásáról, így lényegében a hatalomról szól. A közgazdaságtan legfőbb problémája nem a matematikához való viszonya. A közgazdaságtan válsága alapvetően abból ered, hogy a legalapvetőbb kérdésben elbizonytalanodott. Ahogyan meg tudom ítélni, a közgazdaságtan legfőbb kérdése az állam szerepvállalása vagy annak mértéke; mikor és milyen mértékben megengedett az állam gazdasági szerepvállalása. A rossz hír az, hogy a történelmi tapasztalatok nagyon rosszak. Nem kell ehhez a közelmúlt gyászos évtizedeire gondolni. Nem vagyok történész, ismereteim igencsak korlátozottak, de mindig úgy gondoltam, hogy az államba vetett hit és bizalom Szent Bertalan nevezetes éjjelén kérdőjeleződött meg végképpen. És tegyük hozzá, azóta sem történt semmi olyan, ami miatt nagyon hinni kellene abban, hogy a központi irányítás képes a piaci anarchia fölé kerekedni, és az esetleges gazdasági hatalmat nem az alárendeltek további fosztogatására használni. A modern uralkodó közgazdasági iskolák politikai okokból tűzőn-vízen át védelmezik az alapdogmát: az állami beavatkozás rossz. Hogy miért? Mert rossz, mert abból mindig baj lett, ha a hatalom rátelepedett a gazdaságra. Mindig. Még akkor is, ha egy ideig a helyzet javult. A végén a cár, a cézár mindig benyújtotta a számlát. A matematika itt csak annyiban játszik szerepet, hogy megakadályozza, hogy a politikai B-közép ebben a kérdésben véleményt tudjon nyilvánítani. Csak egy nagyon naiv kutató gondolhatja, hogy a tudomány a tiszta igazságról szól. A bizantikus intrikák rendszere ott van a tudományirányítás minden szintjén. A hatalom és befolyás megszerzése és megtartása a tudományos életben is fontos. A hatalmi játék világszerte minden egyetemi és akadémiai vezető kedvenc szórakozása.

Mivel az uralkodó, „polgári” közgazdasági iskolák csak a matematikai modellek nyelvén hajlandók bármilyen kérdéstről társalogni, a Marx-féle közgazdasági elmélet matematizálása a marxizmus és a „polgári” közgazdasági elmélet közötti eszmecsere beindításának döntő eleme volt. Ebben a munkában Bródy András érdeme vitathatatlan, e tevékenységével nagyban hozzájárult a magyar közgazdászok nemzetközi elismertségéhez.

## A fogyasztás bevezetése a Neumann-modellben

Miként Zalai Ernő tanulmányában megjegyzi – amely elolvasható a *Közgazdasági Szemle* e számában (20–40. o.) –, a Marx–Neumann-elmélet legnagyobb problémája a fogyasztás és a munkaerő újratermelésének realista bevezetése volt. A Neumann-modell eredeti alakjában nem különíti el a munkaerőt és általában a termelést, valamint a fogyasztást. Mindegy, hogy árut vagy munkaerőt termelünk, adottak a termelési konstansok, és kész. Ezt először *Chapernowne* [1945] vetette fel. Ha ehhez még hozzáteszük, hogy egyenlőségre az ikertermelés miatt általában nincs lehetőség, egy alapvető problémára jutunk. A munkaerő ára a modellben nulla is lehet. Észre kell venni, hogy ez alapvetően a modell matematikai alapfeltevéseinek, és nem a mögöttes közgazdasági feltevéseknek a következménye. Egy matematikai modell mutathat nem várt paradox tulajdonságokat. Ezekre rámutatni mindig nagyon hasznos és hálás feladat. Neumann dolgozatának egyik érdeme, hogy észrevette: egy duális modellpárban az egyenlőség helyettesíthető egy egyenlőtlenséggel és egy komplementaritási feltétellel. Ez a gondolat minden matematikai közgazdasági modellben standard eszközzé vált. Ha valamely termékre nem teljesül az egyenlőség, akkor a termék ára a modell követelménye szerint nulla lesz. Ennek megfelelően, ha a technológiai konstansok a munkaerőt túltermelik, akkor a munkaerő ára nulla lesz. A probléma nagyon régen ismert. A megoldásra számos javaslat született. Az egyik igen szellemes megoldásra Zalai Ernő hívja fel a figyelmet tanulmányában.

Én egy másik megoldásra szeretném az olvasót emlékeztetni. A megoldást közel harminc éve Morishima javasolta, és mivel a kérdéshez én is hozzászóltam, a megoldás némiképpen a szívemhez nőtt. A megoldás lényege az, hogy tekintsünk el a Neumann-modell eredendő linearitásától. Tegyük fel, hogy a modell konstansai függhetnek a később meghatározandó egyensúlyi áráktól és egyensúlyi mennyiségektől. Ekkor a modell már nem lesz lineáris, nem oldható meg a standard lineáris programozás eszközeivel, de a fixponttételek segítségével igen. Az így kapott egyensúlyi modell már nem viselkedik paradox módon. Mindig célszerű a közgazdasági kérdéseket a megfelelő matematikai keretben felvetni! A nem lineáris Neumann-modellek ugyanúgy standard matematikai közgazdaságtannak tekinthetők, mint a hagyományos, lineáris Neumann-modell. Ugyanakkor ebben a keretben, éppen a modell gazdagsága miatt, a munkaerő paradox tulajdonságai minden nehézség nélkül feloldhatók. A Neumann-modell eredendő problémája nem a modell dekomponálhatósága (felbonthatósága), hanem annak lényegében lineáris jellege. Természetesen csak azért lényegében, mert a növekedési ütem és a profitráta szerepeltetése miatt a modell szigorú értelemben nem lineáris. A Kemeny–Morgenstern–Thompson-féle feltételek lényege, hogy a modellben szereplő elemi nem linearitást kiküszöbölik, és a modellből egy lineáris modellt csinálnak. Ezzel a modell elemi lesz, és ezért korlátozottan használható, mert az alkalmazott matematikai módszer miatt eredendően rugalmatlan lesz. Tökéletesen egyetértek Zalai Ernővel abban, hogy a felbonthatóság közgazdaságilag álprobléma. Valóban a közgazdasági rendszerek lényeges tulajdonsága a széles körű összefüggés, a minden mindenre ható felbonthatatlanság. Paradox módon Neumann feltétele éppen erre mutat rá. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a feltétel nem nevetségesen túlzó, még akkor is, ha ez a világ egyik legnagyobb matematikusától származik. Abban is igaza van Zalai Ernőnek, hogy amiatt a triviális tény miatt nem bontható fel a modell, mert a gazdaság célja az emberi társadalom újratermelése, azaz alapvetően a munkaerő központi szerepe miatt a gazdaság egy szerves egészet alkot. Ugyancsak egyetértek azzal, hogy a javasolt megoldás példásan elegáns, és alapvetően rávilágít a probléma lényegére. Amivel nem értek egyet, az az, hogy ezzel a kérdéssel a matematikai közgazdasági irodalom nem foglalkozik. Én azt gondolom, hogy foglalkozik, és a problémát az elmélet korábban már egyfajta módon már meg is oldotta. Egy lehetséges megoldás pedig szerintem a nem lineáris Neumann-modellek körében keresendő.

*Hivatkozások*

- BRÓDY ANDRÁS [1969]: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- CHAPERNOWNE, D. G. (1945): A note on J. von Neumann's Article. *Review of Economic Studies*. Vol. 13. No. 1. 10–18. o.
- KEMENY, J. G.–MORGENSTERN, O.–THOMPSON, G. L. [1956]: A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. *Econometrica*, 24. 125–135. o.
- ŁOŚ, J.–ŁOŚ, M. W. (szerk.) [1974]: *Mathematical Models in Economics*. North-Holland, Amsterdam–New York.
- MEDVEGYEV PÉTER [1984]: A General Existence Theorem for von Neumann-model of Economic Growth. *Econometrica*, Vol. 52. No. 4. 963–974. o.
- MORISHIMA, M. [1960]: Economic Expansion and the interest rate in generalized von Neuman models. *Econometrica*, 28. 352–363. o.
- MORISHIMA, M. [1964]: *Equilibrium, Stability and Growth*. Oxford University Press, Oxford.
- MORISHIMA, M. [1969]: *Theory of Economic Growth*. Oxford University Press, Oxford.
- ZALAI ERNŐ [2011]: Az egyensúlyi ráták unicitása és a bérrel pozitivitása a Neumann-modell általánosításaiban. *Közgazdasági Szemle*, 1. sz. 20–40. o.

**Medvegyev Péter**