Közgazdasági Szemle, LVII. évf., 2010. február (142–164. o.)

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

A magyarországi felvételi rendszerek sajátosságai

Magyarországon a középiskolai és felsőoktatási felvételi is központi besorolás szerint történik. Ebben a tanulmányban célunk a felvételi rendszerek kritikus elemzése, a besorolást meghatározó párosítási algoritmusok és tulajdonságaik ismertetése. A középiskolai felvételi rendszer a hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmus tiszta alkalmazása, míg a felsőoktatási felvételi, az úgynevezett vonalhúzás szintén ezen az algoritmuson alapszik, de az eredeti algoritmusnál közérthetőbb formában. A hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmus az egyik alapvető és sokat tanulmányozott párosítási mechanizmus, amelyre mind a párosítások stabilitása, mind a hallgatók őszintesége teljesül. Ez a két tulajdonság csak igen jól működő mechanizmusokat jellemezhet. Sajnos az algoritmus alkalmazásához néhány olyan technikai módosításra is szükség volt, amelyek veszélyeztetik ezeket a jellemzőket: a többszintű keretszámok és a minimális induló létszámok olyan párosításokat is adhatnak, amelyek nem stabilak, míg a jelentkezések számával lineárisan növő jelentkezési díj tulajdonképpen az őszinteséget bünteti.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód:C71, D61, D71.

A párosítások irodalma alig néhány évtizedes történelme alatt igen sikeres karriert futott be. Ebben szerepet játszott az a felfedezés, hogy az Egyesült Államok központosított rezidensi felvételi rendszere (NRMP) ekvivalens a *Gale–Shapley* [1962] által megálmodott algoritmussal, azaz stabil párosítást eredményez. Ez a tulajdonság lehet a program sikerének magyarázata. A 80-as évek közepétől a párosítások elméletének eredményeire alapozva – az illetékes szervek együttműködésével – több felvételi rendszert sikerült megreformálni (*Abdulkadiroğlu–Sönmez* [2003], *Abdulkadiroğlu–Pathak–Roth* [2005], *Abdulkadiroğlu és szerzőtársai* [2005], [2006], *Ergin–Sönmez* [2006], *Roth* [1984], [1986*b*], *Roth–Peranson* [1997], [1999]).

A magyarországi felvételi rendszerek[1] a kivételesen jól megtervezettek közé tartoznak (*Biró* [2007], [2008], *Biró–Fleiner* [2008]).[2] E tanulmány célja a magyarországi középiskolai és felsőoktatási felvételi rendszerek részletes és minél teljesebb körű elemzése a párosításelmélet segítségével. A felsőoktatási felvételi esetében részletesen elemezzük a felvételi eljárás néhány olyan elemét, amelyek eddig elkerülték az elemzők figyelmét, holott alapjaiban módosíthatják a központi algoritmus jellemzőit.

* A szerző köszöni *Bettina Klaus, Guillaume Haeringer, Kertesi Gábor* és egy névtelen bíráló a tanulmány készítése során adott hasznos észrevételeit, tanácsait, illetve az OTKA (NF-72610) és az Európai Bizottság (PERG-GA-2008-230879) támogatását.

[1] Ez a tanulmány a középiskolai és a felsőoktatási felvételivel – azon belül az alapképzésekkel – foglalkozik, az általános iskolai felvételi alig szabályozott és decentralizált.

[2] Mindez ellentétben áll más országokkal, ahol évtizedek óta tudományos szempontból elfogadhatatlan algoritmusokat toldoznak-foldoznak (*Braun–Dwenger–Kübler* [2007], *Teo–Sethuraman–Tan* [2001]).

Kóczy Á. László, Óbudai Egyetem, Keleti Károly Gazdasági Kar (e-mail: koczy.laszlo@kgk.uni-obuda.hu).

Tanulmányunk kétszer két részből áll. Először részletesen bemutatjuk az algoritmusokat, lefordítva azokat a párosítások irodalmában használt matematikai terminológiára, majd a következő két részben rátérünk az algoritmusok tulajdonságainak elemzésére. Figyelmünket ezután a hazai sajátosságok felé fordítjuk. A felsőoktatási felvételi három eleme különösen érdekes: a több szinten megfogalmazott felvételi keretszámok, a legkisebb induló létszámok kikötése végül pedig monetáris ösztönzők, amelyekkel a hallgatókat a preferencialista tömörítésére késztethetjük.

A tanulmány szerkezete tehát a következő. Először bemutatjuk a szóban forgó algoritmusokat, majd rátérünk a jellemzőikre. Ehhez egy rövid matematikai bevezetővel indítunk, majd a két algoritmus és felvételi rendszer elemzése következik, külön-külön összegezve a talált eredményeket.

A magyarországi felvételi rendszerek bemutatása

Középiskolai felvételi

A középfokú közoktatási intézményekbe (a továbbiakban: középiskolákba) való felvételit az Oktatási Hivatal/Közoktatási Információs Iroda bonyolítja le a *középfokú közoktatási intézmények felvételi információs rendszerén* (KIFIR) keresztül. A felvételi rendszer részleteit két jogszabály rögzíti:

– a 11/1994. számú (VI. 8.) Művelődési és Kulturális Minisztérium (MKM) rendelet 17/A. paragrafusa és 8. számú melléklete a középfokú iskolákba történő jelentkezés rendjét és a felvételi eljárás szabályait határozza meg, definiálva minden érintett jogkörét, feladatait és felelősségrendszerét;

– a 17/2008. (V. 9.) Oktatási és Kulturális Minisztérium (OKM) rendelet a 2008/2009. tanév rendjéről, amely 3. számú mellékletében megadja a felvételi eljárás aktuális tanévre szóló feladatainak és határidőinek ütemezését.

A hallgatók jelentkezését iskolájuk bonyolítja le. A tulajdonképpeni jelentkezés egy tanulói adatlapból és jelentkezési lapokból áll. A hallgató tetszőleges számú iskolát, illetve tagozatot megjelölhet – jelentkezési lapból középiskolánként egyet-egyet kell kitölteni. Utóbbin a hallgató akár tíz különböző tanulmányi területet is felsorolhat.[3] A középiskolák a felvételi központtól értesülnek a jelentkezőkről, a listát betűrend szerint rendezve kapják meg. Ugyanakkor a középiskolának ahhoz az információhoz nincs hozzáférése, hogy a hallgatók hányadikként jelölték meg a tanulói adatlapon.

A rangsorolás előre meghirdetett, de intézményenként más-más módon (iskolai eredmények, központilag kiadott írásbeli, illetve az iskola által szervezett szóbeli vizsgák) történik; a jelentkező számára az eredmény egy sorszám, vagy az elutasítás. Utóbbi azt jelenti, hogy a hallgató nem teljesíti az iskola felvételi követelményeit, és akkor sem kerül felvételre, ha az iskola nem tudja feltölteni az adott képzési terület keretszámát.

Ekkor még módosítható a jelentkezéskor megjelölt képzési területek sorrendje, illetve a tanuló új képzési területeket vehet fel a már korábban megjelölt középiskolák kínálatából. Fontos, hogy mivel további felvételi vizsgákra nem kerül sor, további képzési területeket csak az iskolával való előzetes egyeztetés alapján (jellemzően az iskola javaslatára) célszerű megjelölni, hiszen itt feltételezzük, hogy az iskola a rendelkezésre álló jegyek és felvételi vizsgaeredmények alapján képes a hallgatót rangsorolni.

A hallgatókat és az iskolákat a felvételi központ párosítja össze a hallgatók, illetve az iskolák végleges preferencia-sorrendjei alapján.

[3] A nyomtatványok letölthetők a Közoktatási Információs Iroda honlapjáról (www.kir.hu).

A PÁROSÍTÁSI ALGORITMUS. Az algoritmus két táblázatból indul ki. Egyrészt minden egyes tagozathoz tartozik egy, a diákokra vonatkozó rangsor, mely a hallgatók sorszáma mellett azt is tartalmazza, hogy egy hallgató felvehető-e. Másrészt minden hallgatóhoz tartozik egy rangsor, amely viszont a tagozatokra vonatkozik.

Az algoritmus hitelessége szempontjából fontos, hogy a hallgatók név nélkül, csak azonosítóval szerepelnek a rangsorokban, tehát manipulációra nincs is igazán lehetőség. Az algoritmus lényege a következő.

1. Az iskolák számára elfogadható jelentkezéseket élőnek, a nem elfogadhatókat nem élőnek jelöljük.

2. Minden hallgatót az általa legjobb helyre sorolt még élő tagozathoz rendeljük.

3. Az egyes tagozatokhoz rendelt hallgatókat sorba rendezzük. A felvételi keretszámon túli hallgatók jelentkezését nem élőre állítjuk.

4. Ha az ezáltal elutasított hallgatóknak van még élő jelentkezése, akkor visszatérünk a 2. lépésre.

Meg kell jegyeznünk, hogy amikor visszatérünk a 2. lépésre, az újonnan besorolt jelentkezők kiszoríthatnak korábban élő jelentkezéseket. Az így kiszorított tanulókat a következő még élő jelentkezésükhöz rendeljük hozzá.

Könnyű belátni, hogy a tagozatokba egyre több és a rangsoraik alapján egyre jobb tanulók kerülnek be, így az algoritmus véges idő alatt véget ér. Ekkor a jelentkezések a következő három kategória valamelyikébe sorolandók:

– élő és besorolt – a tanulót erre a tagozatra vették fel;
– élő és nem besorolt – a hallgatót egy általa előbbre sorolt tagozatra vették fel;
– nem élő.

Azok a hallgatók, akiknek csak nem élő jelentkezése maradt, nem nyertek felvételt egyik helyre sem.

Jelentkezés felsőoktatási intézményekbe

A felsőoktatási intézményekbe való jelentkezés és felvételi is központosított módon történik; rendjét a felsőoktatási intézmények felvételi eljárásairól szóló 237/2006. (XI. 27.) kormányrendelet szabályozza.

A FELVÉTELI ELJÁRÁS MENETE. A felsőoktatási felvételi évente két alkalommal történik, de a jelentkezések döntő többsége az ősszel induló képzésekre vonatkozik február 15-i benyújtási határidővel. A jelentkezést a diák kezdeményezi, aki írásban vagy elektronikusan adhatja meg az intézményeket, ahova jelentkezni szeretne. A jelentkezés fontos eleme az intézmények rangsorolása; a rangsoron a felvételi döntés előtt, de már az érettségi eredménye, tehát a felvételi pontszám ismeretében még egyszer módosíthat.

A hallgatók alaphelyzetben három tagozatot jelölhetnek meg államilag finanszírozott és költségtérítéses formában is. Így a finanszírozási formát is figyelembe véve összesen hat tagozat megjelölésére van lehetőség. Ha a hallgató ezenfelül további tagozatokat is megjelölne, jelentkezésenként 2000-2000 forint kiegészítő díjat kell fizetnie a 9000 forintos alapdíjon felül. Hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű hallgatók kedvezményt kapnak az alapdíjból, de a kiegészítő díjat nekik is fizetniük kell.

A középiskolai felvételihez hasonlóan a felsőoktatási felvételi során a párosítás központilag történik. Hogy ez lehetséges legyen, tisztáznunk kell az iskolák preferenciáit, illetve a kapacitási korlátokat is.

A középiskolai felvételihez hasonlóan a rangsor alapja a pontszámítás. A pontok számításának módját a *1. táblázat* foglalja össze vázlatosan. A szabályok némiképp különböznek szakonként, például más-más érettségi tárgyakat kell figyelembe venni, vagy például a nyelvszakok esetében a nyelvből tett emelt szintű érettségi alapkövetelmény, így többletpont sem jár érte. A pontszámítás módját minden intézmény köteles előre publikálni a Felsőoktatási felvételi tájékoztatóban. Fontos még tisztáznunk, hogy a jelentkezéskor az érettségi eredménye még nem ismert, így a hallgatók úgy töltik ki a jelentkezési lapot, hogy legfeljebb bizonyos várakozásaik lehetnek a pontszámukat illetően.

1. táblázat
Pontszámítás a felsőoktatási felvételiben 2008-tól

	Kategória	Pontszámítás módja	Maximális pont
1.	*Érettségi pontok összesen*		*200*
	– érettségi eredménye alapján	két érettségi tárgy százalékos eredménye	200
2.	*Tanulmányi pontok összesen*		*200*
2. *a)*	1. Év végi osztályzatok	utolsó két év osztályzatai duplázva:	100
		– magyar nyelv és irodalom	20
		– matematika	20
		– történelem	20
		– idegen nyelv	20
		– választható tárgy	20
	2. Érettségi eredmény	százalékos eredmények átlaga	100
Vagy:			
2. *b*)	Érettségi pontok	mint fent (tehát duplázva)	200
3.	*Többletpontok*		*80*
	Emelt szintű érettségiért	darabonként (maximum 2)	40
	C típusú nyelvvizsga	közép-, illetve felsőfok	35/50
	Versenyeredmények	versenytől, helyezéstől függően	20-80
	Előnyben részesítés	hátrányos helyzet	20-50
		fogyatékosság vagy gyes	50
	Összesen		*480*

Az egyes szakokra, tagozatokra felvehető hallgatók számát az előzetesen közzétett felvételi létszámok határozzák meg. Ugyanakkor szakonként, illetve szakcsoportonként országosan is léteznek létszámkorlátok, sőt a felvehető hallgatók listáját is szakokra, szakcsoportokra közösen, az intézményi kapacitási korlátokat figyelembe véve határozzák meg.

Míg bizonyos szakoknál a túljelentkezés jelent problémát, egy szak csak akkor lehet rentábilis, ha elegendő felvett hallgatóval tud indulni. Ennek megfelelően minimumlétszámok is meghatározásra kerülhetnek, ekkor a szak csak elegendő felvett hallgató esetén indul el.

Külön érdekesség a kétféle finanszírozási forma. A költségtérítéses hallgatóknak a képzésük költségének egy részét tulajdonképpen tandíjként kell befizetniük, míg az államilag finanszírozott hallgatók tandíjmentesek. Az a hallgató, aki egy szak hallgatásáért akár tandíjat is fizetne, természetesen tandíjmentesen is szívesen hallgatná. Ezt külön díj nélkül megjelölheti a jelentkezési lapon, hiszen a jelentkezések számának meghatározásakor a finanszírozási formák nem számítanak, ugyanakkor a sorrendben természetes, hogy esetenként ugyanaz a szak költségtérítéses és az államilag finanszírozott formában teljesen máshol szerepel a hallgató rangsorában, *ad absurdum* a költségtérítéses forma már nem elfogadható, így nem is kerül felsorolásra.[4] Természetesen ugyanarra a képzésre költségtérítéses formában könnyebb bekerülni.

A leírtak szerint összeállított jelentkezések alapján az Educatio Kht. javaslatot készít a felvételi ponthatárokra. Aki nem éri el egy adott szak felvételi ponthatárát, nem nyert felvételt. Aki eléri, az igen, de minden hallgató csak egy helyre, az összes sikeres jelentkezése közül az általa legmagasabbra sorolt szakra nyer felvételt.

Bár az alsó és felső korlátokat az intézmények jó előre közzéteszik, az első körben (nem publikusan) meghatározott felvételi ponthatárok alapján a kapacitások még változhatnak. A cél minden esetben az államilag támogatott tanulói helyek és az intézmények kapacitásának minél jobb kihasználása. A változtatást az – egyébként a minél nagyobb hallgatói létszámokban anyagilag is érdekelt – iskolák kezdeményezik, és e változtatások a párosítások újabb és újabb előállítását kívánják, de természetesen csak a végső ponthatárt hirdetik ki.

A VONALHÚZÓ ALGORITMUS. Adottnak tekintve a hallgatók és a szakok preferenciáit, a felvételi ponthatárok meghatározása, azaz a párosítás a következőképpen történik.

1. Minden hallgatót az általa első helyen megjelölt szakhoz rendeljük.

2. Minden egyes szakhoz rendelünk egy ponthatárt: ha a szakot a felvételi keretszámnál kevesebben választják, akkor a ponthatár a legalacsonyabb pontszámmal rendelkező hallgató pontszáma. Ha a szakot választók száma meghaladja a keretszámot, azt a legalacsonyabb ponthatárt választják, amelyre még igaz, hogy a ponthatár feletti jelentkezések a felvételi keretszámok alapján még mind felvehetők; minden más hallgató elutasításra kerül, a szóban forgó szakra való jelentkezésüket töröljük.

3. Ha az elutasított hallgatóknak van még további jelentkezése, akkor a preferált élő jelentkezést választják. Ha nincs további jelentkezésük, akkor az elutasított hallgatók nem nyernek felvételt, a felvételi ponthatárok pedig az utolsó értéken rögzülnek.[5]

Az algoritmus lényege, hogy a hallgatók a saját rangsorukon zongoráznak végig. Az algoritmus során lehetőség van magasabb szintű kvóták figyelembevételére is, ugyanakkor külön kell foglalkozni azokkal a szakokkal, ahol a felvettek száma nem éri el a minimális indítható létszámot. Nyilvánvaló, hogy nem szükséges azonnal minden ilyen szakot megszüntetni, és a rá való jelentkezéseket érvényteleníteni, hiszen akár egyetlen ilyen szak törlésével is előfordulhat, hogy az ide jelentkező hallgatók más nehezen induló szakra is jelentkeztek. Ennek kezelésére nincs kidolgozott algoritmus, ilyenkor a legrosszabb felvételi aránnyal (hallgatók száma osztva a legkisebb induló létszámmal) rendelkező szakot töröljük elsőként.[6]

Összegzés

A középiskolai felvételi alapja egy nagyon tiszta késleltetett elfogadási algoritmus. Mint ezt a következő fejezetben részletesen fogjuk tárgyalni, bár ez az algoritmus sem tökéletes, a szakmai közvélemény egyetért abban, hogy az iskolaválasztási párosítások esetén ez a legjobb választás.

A felsőoktatási felvételi magja ugyanez az eljárás, de egy jóval kevésbé tiszta formában. A vonalhúzásos algoritmus hazai specialitás, tulajdonságai kevésbé ismertek. A felvételinek van továbbá néhány olyan eleme, amelyek továbbárnyalják az algoritmusról alkotható

[4] A fordított helyzet inkább csak figyelmetlenségből fordul elő, hiszen az egyértelműen kedvezőbb finanszírozási forma feltüntetése – feltéve, hogy létezik az adott szakra – nem jár többletköltséggel.

[5] Előfordulhat, hogy egy szakra egyáltalán nem érkezik jelentkezés – itt a ponthatár tetszőlegesen választható meg.

[6] *Forrás: Varjasy Gábor* (Educatio Kht.) szóbeli közlése; az algoritmus részletes dokumentációja nem nyilvános.

képet. Szemben például a középiskolai felvételivel, a felsőoktatási intézményekbe jelentkezők jellemzően kevés szakra adják be jelentkezésüket, aminek az az oka, hogy teljes rangsort megadni egy kisebbfajta vagyon. Míg a hagyományos párosítási modellekben az iskolák/szakok csak maguk rendelkeznének felvételi korlátról, Magyarországon több szinten is meghatározásra kerülnek felvételi keretszámok. Hasonlóan problémás a legkisebb induló létszámok figyelembevétele. A hallgatók a pontszámítás után mindnyájan egy 480 pontnál nem nagyobb egész számot kapnak, amelynek alapján rangsorolják őket. Világos, hogy egy-egy népszerűbb szak esetén óhatatlanul kialakul pontegyenlőség, tovább bonyolítva az algoritmust. Ezeket külön-külön tárgyaljuk a következő fejezetben.

A magyarországi felvételi rendszerek tulajdonságai

A következő részben bevezetjük és formalizáljuk a párosítások matematikai modelljeit. Ezután rátérünk a konkrét algoritmusok tulajdonságaira. A párosítások elméleti hátterét a Közgazdasági Szemle egy korábbi számában már feldolgoztuk (*Kóczy* [2009]), itt csak a legfontosabb definíciókra hagyatkozunk.

Fogalmak és jelölések

A párosítás résztvevői két diszjunkt halmazra oszthatók: iskolákra *($\mathcal{C}$, colleges)*:

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\},$$

illetve hallgatókra *($\mathcal{S}$, students)*:

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, ..., s_n\}.$$

A párosítás alapvetően a másik halmaz résztvevőivel történik: az iskolákat hallgatókkal, a hallgatókat iskolákkal párosítjuk. A felvételi lapon az intézmény megnevezése mellett szerepel a szak, a képzési és finanszírozási forma is, azaz egy jelentkezés például nem az Óbudai Egyetemre, hanem az egyetem Keleti Károly Gazdasági Karának gazdálkodási és menedzsment alapképzésének költségtérítéses nappali tagozatára történik. Mi a könnyebb nyelvezet kedvéért, követve az irodalmi hagyományokat, diákokról, hallgatókról, illetve iskolákról, intézményekről fogunk beszélni, ahol az utóbbi valójában a középiskolai felvételi esetén iskola–tagozat párt, míg a felsőoktatási felvételiben egy intézmény–szak–tagozat–finanszírozási forma négyest takar.

A hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat rangsorolják. Feltételezzük, hogy a preferenciák teljesek és tranzitívak, leírhatók egy egyszerű rangsorral, azaz felsorolással, ahol az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az elfogadhatatlan partnereket. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$.

Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az s diák preferálja a C_i iskolát a C_j-vel szemben. Az s_i hallgató elfogadható a C iskola számára, ha $s_i \geq_C C$.

Egy *sok az egyhez* párosításban egy $C \in \mathcal{C}$ iskola jellemzően egynél több, de legfeljebb $q_C \in \mathbb{N}_+$ hallgatót vehet fel. q_C-t az iskola (felvételi) kvótájának nevezzük.

A következő definícióhoz szükségünk még egy fogalomra. Egy adott X halmaz elemeinek *rendezetlen családján X* elemeinek olyan gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

1. DEFINÍCIÓ (PÁROSÍTÁS). *A μ párosítás egy olyan függvény, amely a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz elemeihez a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. $|\mu(s)| = 1$, *és* $\mu(s) = s$ *vagy* $\mu(s) \in \mathcal{C}$, *azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához, vagy önmagához rendeli;*

2. $|\mu(C)| = q_C$, *azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak r eleme hallgató* [$|\mu(C) \cap \mathcal{S}| = r$], *akkor a maradék* $q_C - r$ *helyet önmagával, C-vel tölti fel.*

3. Akkor, és csak akkor $\mu(s) = C$, *ha* $s \in \mu(C)$, *azaz a párosítás kölcsönös.*

A párosításokat grafikusan is ábrázolhatjuk:

$$m_1 = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & s_3 \\ s_1, s_2, C_1, C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

A fenti párosítás azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből 2 helyet töltött fel hallgatókkal, C_2 csak egy hellyel rendelkezett, de ezt sikeresen fel is töltötte, míg s_3 felvételije sikertelen volt.

Preferenciák. Az *egy az egyhez* párosítási modellben minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolja a párosításokat. Tehát ha $\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$ (ahol $x \in \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$).

Ez itt is igaz a diákokra, azonban az iskolákat itt nem diákokkal, hanem diákok csoportjaival párosítjuk, így mindenekelőtt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogy rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A C iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^{\#}(C)$-vel jelöljük. Elvben $P^{\#}(C)$ bármi lehet, de feltételezhető, hogy ha a hallgatók egy adott halmazában egy hallgatót egy preferált hallgatóra cserélünk, míg a többit változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja:

2. definíció. *A hallgatók részhalmazain értelmezett* $P^{\#}(C)$ *reláció fogékony [az egyéni hallgatókra definiált* $P(C)$ *preferenciákra], ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \backslash \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

ahol értelemszerűen az első preferenciareláció $P^{\#}(C)$*-re, az utóbbi* $P(C)$*-re vonatkozik.*

Bár a fogékonyság némileg korlátok közé szorítja a $P^{\#}(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^{\#}(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferenciarelációt [hiszen $P^{\#}(C)$-t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is].

Stabilitás. Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös beleegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$, és vagy az s hallgató elfogadhatatlan a C iskola, vagy a C iskola az s hallgató számára. Ellenkező esetben az elégedetlen résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoktól mentes párosításokat egyénileg racionálisnak nevezzük.

Hasonlóan, a C iskola és az s hallgató együttesen blokkolhatja az adott μ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$, és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$, és létezik olyan $\sigma \in \mu(C)$, melyre $s >_C \sigma$, itt σ lehet hallgató, vagy maga C, azaz egy üres hely.

3. definíció (stabil párosítás). *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális és semelyik hallgató–iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló koalíciók blokkjaira is kiterjesztett stabilitás ezzel egybeesik. Azt mondjuk tehát, hogy egy μ párosítás csoportosan instabil, avagy egy koalíció blokkolja, ha létezik egy A koalíció, és egy μ' párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

– $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,
– $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást előbbre sorolják,
– ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát C új hallgatókat csak A-ból meríthet,
– $\mu'(C) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve, minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

4. DEFINÍCIÓ. *Egy párosítás csoportosan stabil, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

1. TÉTEL. *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

Mivel egy hallgató–iskola páros is koalíció, ha egy párosítást egy ilyen pár blokkol (azaz ha nem stabil), akkor csoportosan is instabil. Tehát, ha csoportosan stabil, abból következik, hogy stabil.

A másik irányhoz a fogékonyságot használjuk. Ha ugyanis egy koalíció blokkol egy párosítást, akkor létezik olyan hallgató–iskola pár, hogy ebben a blokkban mindketten jól járnak (ha nincs hallgató a blokkoló koalícióban, akkor egy még egyszerűbb esettel van dolgunk, amit az olvasóra bízunk), méghozzá az iskola egy rosszabb hallgatót cserél le.[7] Ekkor viszont ez a páros a koalíciótól függetlenül is blokkolná a kiindulási párosítást, tehát az nem stabil.

GALE–SHAPLEY-ALGORITMUS. Kérdés, hogy léteznek-e stabil párosítások. A *sok az egyhez* párosítások megfeleltethetők *egy az egyhez* párosításoknak, ahol tulajdonképpen a C iskolát q^C darabra bontjuk, és minden egyes miniiskola pontosan egy főt vehet fel. Erre az esetre *Gale–Shapley* [1962] igazolta, hogy mindig létezik stabil párosítás, tehát ez az eredmény – fogékony preferenciák esetén – kiterjed a *sok az egyhez* párosításokra is. Az eredmény igazolásához *Gale–Shapley* [1962] a késleltetett elfogadási algoritmust használta, és igazolta, hogy az algoritmus mindig stabil párosítást eredményez. Az algoritmus is általánosítható a *sok az egyhez* esetre, most ezt az általánosítást mutatjuk be.

0. A közömbös preferenciákat önkényesen feloldjuk.
1.*a)* A tanulók megjelölik a preferált iskoláikat.
1.*b)* Az iskolák elutasítják az elfogadhatatlan és a kvótán felüli jelentkezéseket.
k.a) A k – 1-edik lépésben elutasítottak megjelölik a maradékból leginkább szimpatikus iskoláikat.
k.b) Az iskolák elutasítják az elfogadhatatlan és a kvótán felüli jelentkezéseket.
STOP, ha a felvétel nélkül maradóknak nincs több elfogadható jelentkezésük.

ŐSZINTESÉG/TAKTIKÁZÁS. Egy párosítási mechanizmus a megadott preferenciák alapján készíti el a párosítást.

Ugyanakkor a megadott és a valós preferenciák nem feltétlenül egyeznek. Példaként felhozhatjuk a híres-hírhedt bostoni algoritmust (*Alcalde* [1996], *Abdulkadiroğlu és szerzőtársai* [2005], *Kóczy* [2009]), ahol a jobb iskolákban gyakorlatilag csak az első helyes

[7] A blokkoló koalícióba belefférnek olyan hallgatók is, akikkel külön nem járna jól az iskola, ezért kell itt óvatosnak lenni.

jelentkezéseknek van esélyük, vagy a például Németországban használt prioritásalapú párosítási mechanizmust (*Braun–Dwenger–Kübler* [2007]).

Bostonban a hallgatók rangsora nem tanulmányi eredmények, hanem bizonyos körülmények függvénye (nevezetesen a lakóhely–iskola távolság, illetve hogy a jelentkezőnek jár-e már testvére az iskolába).

Világos ugyanakkor, hogy aligha célszerű az iskolát első helyen (vagy bárhol) megjelölni, ha az iskola népszerű, és a jelentkezőre egyik feltétel sem teljesül, hiszen jelentkezése nagy valószínűséggel sikertelen lesz, viszont másutt elveszti prioritását. Egy ilyen helyzetben a jelentkezési lapokon megadott rangsorok alapvetően eltérhetnek a jelentkezők valós preferenciáitól.

A hallgatók taktikai megfontolásai egy kétlépcsős játék keretein belül vizsgálhatók: első lépésként a hallgatók, illetve az iskolák választanak egy preferencia-sorrendet, majd az algoritmus a deklarált preferenciasorok alapján határozza meg a párosítást. A megoldásban visszafelé érvelünk: adott párosító algoritmus esetén bármely preferenciaprofilra meghatározza a párosítást, a párosításokra vonatkozó preferenciák alapján pedig meghatározhatjuk a preferenciaválasztó nem kooperatív játék Nash-egyensúlyait.

Középiskolai felvételi

STABILITÁS. A középiskolai felvételi központi párosítási algoritmusa a Gale–Shapley-algoritmus (*Gale–Shapley* [1962]) közvetlen általánosítása *sok az egyhez* párosításokra. A Gale–Shapley-algoritmus a párosítások elméletének kiindulópontja, amelynek tulajdonságait egy korábbi tanulmányban (*Kóczy* [2009]) részletesen bemutattuk, itt csak a legfontosabbakat emeljük ki.

2. TÉTEL. *A Gale–Shapley-algoritmus által előállított párosítás stabil.*

1. KÖVETKEZMÉNY. *A KIFIR-algoritmus által előállított párosítás stabil.*

A kapott – párosításra tehát nincs olyan (C, s) iskola–diák páros, amelyre a következők teljesülnek:

1. az s hallgató szívesebben tanulna a C, mint a $\mu(s)$ középiskolában (ahova felvételt nyert),
2. létezik olyan $s' \in \mu(C)$, hogy C is szívesen venné fel az s' helyett az s jelentkezőt.

Általában több stabil párosítás is létezik. *Gale–Shapley* [1962] megfigyelték, hogy ha a házassági modellben felcseréljük a nemek szerepét, és a nők válnak kezdeményezővé, a kapott párosítás minden nő számára (gyengén) kedvezőbb. Hasonlóképpen a *sok az egyhez* párosítások esetén is fontos, hogy ki a kezdeményező fél. Az Egyesült Államok országos rezidenspárosító programjában (NRMP) kezdetben a kórházak, majd az 1990-es évektől a hallgatók váltak kezdeményezővé. A változás egyik oka pontosan az volt, hogy ez a hallgatók számára kedvezőbb párosítást eredményez, még akkor is, ha tényleges javulásról csak az esetek kevesebb mint egy ezrelékében beszélhetünk (*Roth–Peranson* [1997], [1999]).

A KIFIR-algoritmus esetében a diákok preferenciáján megyünk végig, tehát a diákok a kezdeményezők.

3. TÉTEL. *A KIFIR felvételi algoritmus a hallgatók számára optimális stabil párosítást eredményez.*

Komoly probléma egyes kisebb, gyakran vidéki iskolákban, hogy nem mindig tudják feltölteni a keretszámot, és a felvett diákok képességei is elmaradnak az átlagtól. Mennyiben lehet ezért e konkrét algoritmust felelőssé tenni? Vajon egy, az iskolaoptimális stabil párosítást eredményező, vagy valamely más algoritmus meg tudná-e menteni ezeket az iskolákat?

4. TÉTEL (*Roth* [1984]). *A felvételt nyert hallgatók és a betöltött férőhelyek minden stabil párosítás esetén ugyanazok.*

5. TÉTEL (*Roth* [1986*a*]). *Ahhoz az intézményhez, amely valamely stabil párosítás esetén nem tudja minden üresedését feltölteni, minden stabil párosítás pontosan ugyanezeket a hallgatókat fogja hozzárendelni.*

ŐSZINTESÉG. A stabilitás önmagában csak azt szavatolja, hogy a megadott preferenciák alapján nincs blokkoló koalíció, illetve pár. Ha a megadott preferenciák nem egyeznek a valódiakkal, akkor ezek alapján vajmi keveset mondhatunk a párosítás stabilitásáról. Ezt mondja ki általánosságban a *6. tétel.*

6. TÉTEL (*Roth* [1985]). *Nincs olyan stabil párosítás, amelyben minden intézmény számára domináns stratégia a valós preferenciáik felfedése.*

Bár ez az eredmény nem túl jó hír, a középiskolai felvételi esetében a párosításoknak egy speciális esetéről van szó – tulajdonképpen iskolaválasztási problémáról. A különbség az iskolák viselkedésében rejlik: itt az iskolák nem vagy csak igen korlátozott mértékben módosíthatják valós preferenciáikat, hiszen a sorrendet publikus elvek és – legalábbis az érintettek számára – ismert bemeneti adatok alapján határozzák meg: a felvételin elért, illetve részben a hozott pontok alakítják ki a végső eredményt, amelynek alapján a rangsorolás történik. Feltételezhetjük tehát, hogy az iskolák nem tudnak taktikázni, vagyis valójában az a kérdés, hogy a hallgatóknak mennyire áll érdekében a valós preferenciáik felfedése.

7. TÉTEL *Roth* [1986*a*]). *A hallgatóoptimális stabil párosítás esetén a hallgatók számára domináns stratégia preferenciáik felfedése.*

Tehát ha a párosítás hallgatóoptimális, iskolaválasztási probléma esetén egyik fél sem taktikázik, így a vizsgált stabilitás valóban stabilitást jelent, ez pedig a felvételi rendszer sikerének feltétele.

ÖSSZEFOGLALÁS. Összességében elmondhatjuk, hogy a KIFIR algoritmusa a Gale–Shapley-algoritmus tiszta és közvetlen alkalmazása ennek minden előnyével együtt, garantálva a stabilitást, valamint a gyakran nem kis kudarcot okozó taktikázás szükségtelenségét. Az a tény, hogy az algoritmust a párosítási irodalomtól függetlenül fejlesztették ki, egyszerre dicséri a KIFIR párosítási algoritmus fejlesztőinek hozzáértését, illetve igazolja a Gale–Shapley-algoritmus természetes és kézenfekvő mivoltát.

Felsőoktatási felvételi

Mint az előző fejezetben részletesen bemutattuk, a felsőoktatási felvételi alapja a „vonalhúzás," amelyet néhány további elem, nevezetesen a többszörös kvóták, a minimális induló létszámok, a pontegyenlőség miatti gyenge rendezés és a jelentkezések számára vonatkozó puha korlátok tesznek színesebbé. A továbbiakban bemutatjuk, hogy a ponthúzó algoritmus ekvivalens egy hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmussal, majd megvizsgáljuk a különböző módosítások hatását erre az algoritmusra.

A VONALHÚZÓ ALGORITMUS STABILITÁSA. Első lépésként igazoljuk, hogy a vonalhúzásos párosítás ekvivalens a hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmus eredményével. Az eredményhez eltekintünk a magyar felvételi rendszer előbb említett furcsaságaitól.

Feltételezzük tehát, hogy a hallgatók az összes intézményt rangsorolják, valamint nincs két olyan hallgató, akinek egyezne a pontszáma. Nincsenek minimumlétszámok, és csak iskolánként egy kvóta, azaz keretszám korlátozza a felvehető hallgatók számát.

8. TÉTEL. *A vonalhúzásos párosítás pontosan a hallgatóoptimális stabil párosítás.*

A bizonyítás két lépésből áll. Először igazoljuk, hogy a vonalhúzásos párosítás stabil, majd igazoljuk, hogy hallgatóoptimális. Jelölje a párosítást μ!

A stabilitás bizonyítása indirekt. Tegyük fel, hogy létezik egy s hallgató, akit a C iskolához rendelt az algoritmus, ugyanakkor s a C' iskolával blokkolhatja a párosítást! A blokkolás feltétele, hogy mindkét fél érdekelt, tehát egyrészt $C' >_s C$, másrészt létezik olyan $x \in \mu(C')$, hogy $s >_{C'} x$. Ha $x \neq C'$ legalább egy, az s-nél alacsonyabb pontszámú hallgató is felvételre került, tehát s – pontszáma alapján – felvehető C'-be.

Ugyanakkor ha $x = C'$, azaz C' az s hallgatót az egyik üresen maradt helyre szeretné felvenni, az azt jelenti, hogy s még elfogadható számára. Viszont ha amúgy nem kerül betöltésre minden hely, akkor minden elfogadható hallgató felvételt nyer, azaz pontosan azok a hallgatók elfogadhatók, akiknek a pontszáma eléri a ponthatárt. Ha s elfogadható, akkor pontszáma eléri a kívánt szintet, tehát ismét azt kapjuk, hogy felvehető. Ezzel minden esetet diszkutáltunk.

Ezután vegyük észre, hogy definícióból adódóan, ha s felvételt nyert C'-be is, és C-hez képest ezt preferálja, akkor a párosítás a C' iskolához, nem pedig a C-hez rendeli. Ellentmondás, tehát nincs blokkoló pár, vagyis a párosítás stabil.

Az algoritmus során egy s hallgató C-be való jelentkezése csak akkor kerül elvetésre, ha s a C számára elfogadhatatlan, vagy C a helyeket preferált hallgatókkal töltötte fel, és így a párosítás minden hallgatóhoz a szerinte legjobb iskolát rendeli. Az algoritmus tehát hallgatóoptimális.

Hogy mindez világosabb legyen, vegyük a következő példát:

1. PÉLDA. *Legyen $|\mathcal{C}| = |\mathcal{S}| = 2$, illetve $q_1 = q_2 = 1$. A preferenciák a következők:*

$$P(s_1) = C_1, C_2$$

$$P(s_2) = C_2, C_1$$

$$P(C_1) = s_2, s_1$$

$$P(C_2) = s_1, s_2$$

Tegyük fel, hogy az iskolák preferencia-sorrendje mögött az alábbi elért pontok állnak:

	C_1	C_2
s_1	400	450
s_2	450	400

A vonalhúzásos algoritmus a ponthatárt mindkét iskola esetében 400 pontban határozza meg, így s_1 a C_1 iskolába, míg s_2 a C_2 iskolába nyer felvételt. Létezik ugyanakkor egy másik stabil párosítás is, ahol a ponthatárok 450 pontnál kerülnek meghatározásra és s_1 a C_2 iskolába, míg s_2 a C_1 iskolába nyer felvételt. Utóbbi párosítás is stabil, azonban ez a hallgatók számára a lehető legrosszabb (egyben az iskolák számára a legjobb) stabil párosítás. Az intézményoptimális párosító algoritmus a következő.

1. Első körben az iskolák – egymástól függetlenül – kiválasztják azt a legalacsonyabb ponthatárt, amelyre a hallgatók még nem lépik túl a felvehető létszámot.
2. Ha egy hallgató egynél több helyen is bekerült a felvehető hallgatók közé, csak az általa előbbre sorolt jelentkezését tartja meg, a többit érvényteleníti.
3. Az iskolák lehetőség szerint tovább csökkentik a ponthatárokat, hogy a megüresedő helyeket új hallgatókkal töltsék fel.
4. Ha sikeres a csökkentés, vissza a 2. lépésre, ha a ponthatárok nem változtak: STOP.

Az algoritmus fontos eleme, hogy az intézmények adják meg a ponthatárokat, mindig a legjobb hallgatókat választva ki. Érthető tehát, hogy az algoritmus az iskolák szempontjából optimális párosítást adja.

A fenti példában is láthattuk, hogy a vonalhúzási algoritmus által generált ponthatárok alacsonyabbak az intézményoptimális algoritmus által megadottaknál. Ez a tulajdonság általánosan is igaz.

A tételt az *egy az egyhez* párosításokra igazolta *Gale–Shapley* [1962], de mivel minden fogékony preferenciákkal rendelkező *sok az egyhez* párosítási probléma is felírható *egy az egyhez* problémaként is, a tétel rögtön kiterjeszthető a felvételi párosítás problémájára is.[8]

9. TÉTEL (*Gale–Shapley* [1962]). *Minden* (M, W, P) *társkereső piachoz tartozik egy M-optimális és egy W-optimális párosítás. Ezek pontosan a késleltetett elfogadási algoritmus által leányvásár, illetve legényvásár esetén meghatározott* μ_M, *illetve* μ_W *stabil párosítások.*

2. KÖVETKEZMÉNY (*Biró* [2007], [2008], *Jankó* [2009]). *Jelölje* l_S, *illetve* l_C *a hallgató-, illetve az intézményoptimális vonalhúzási algoritmus által meghatározott ponthatárokat* ($l_S, l_C \in \mathbb{N}^C$). *Legyen továbbá* $l \in \mathbb{N}^C$ *egy harmadik ponthatárvektor, mely stabil párosítást eredményez. Ekkor*

$$l_S \leq l \leq l_C.$$

3. KÖVETKEZMÉNY. *A vonalhúzásos párosítás pontosan a hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmus által generált párosítás.*

Ez a folyomány ismét ablakot nyit a szakirodalom által legtöbbet tárgyalt algoritmus irodalmához; az előző alfejezetben kimondott tételek itt is érvényesek, bár jelen esetben az algoritmus kevésbé tiszta formájáról van szó, és fennáll a veszély, hogy akár apró változtatások is alapvetően megváltoztatják az algoritmus tulajdonságait.[9] A következőkben ezeket a hazai specialitásokat vizsgáljuk.

[8] A tétel részletesebb bemutatását itt mellőzzük, lásd *Kóczy* [2008].

[9] Erre jellemző példa a rezidensképzésre való felvételi az Egyesült Királyságban. Bár a stabil párosítást eredményező Egyesült Államok országos rezidenspárosító programjában (NRMP) volt a minta, „kisebb" változtatásoknak köszönhetően elvesztek annak kedvező tulajdonságai (*Roth* [1991], *Kagel–Roth* [2000]).

TÖBBSZINTŰ KERETSZÁMOK. A legjobb párosító algoritmus is elrontható, ha a gyakorlati alkalmazásban, úgymond praktikus okokból sérülnek bizonyos ritkán kimondott feltételek. Mint látni fogjuk, a néhány hazai jellegzetesség többsége problematikus.

A felvételi rendszer 2007-es reformja óta a szakokra országosan meghatározott kvótákat már nem az intézményi kvóták összeadásával határozzák meg, ezáltal egyfajta verseny alakul ki az intézmények között. Tehát aki az Óbudai Egyetem gazdálkodási és menedzsment szak alapképzésére jelentkezik, az nemcsak az ide jelentkezőkkel, hanem minden más főiskola és egyetem azonos nevű szakára jelentkezővel is versenyez. Ezt a problémát *Biró és szerzőtársai* [2009] tőlünk függetlenül, részletesen vizsgálta.

5. DEFINÍCIÓ. *Az iskolák $\mathcal{C}$ halmazának minden P részhalmazára felvehető hallgatók számát, azaz a P-re vonatkozó kvótát q(P)-vel jelöljük. Korábbi jelölésünket használva $q_C = q(\{C\})$. (Szubadditív) többszintű kvótákról akkor beszélünk, ha létezik olyan P, hogy*

$$q(P) < \sum_{C \in P} q(C). \tag{1}$$

Szubadditív kvóták megadhatók az iskolák tetszőleges P részhalmazára, de külön figyelmet érdemelnek a hierarchikus kvótarendszerek, ahol két szubadditív kvótával rendelkező iskolacsoport metszete triviális: üres, vagy valamelyik iskolacsoporttal egyezik.

Különösen érdekesek *a hierarchikus rendszert* alkotó többszintű kvóták.

6. DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy a kvóták hierarchikus rendszert alkotnak, ha az iskolák minden $P, Q \subset \mathcal{C}$ részhalmazának létezik olyan $P = (P_1, P_2, ..., P_k)$, illetve $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_l)$ partíciója, hogy $q(P) = \sum_i q(P_i)$, és $q(Q) = \sum_i q(Q_i)$, illeteve bármely (P_i, Q_j) párra*

$$P_i \cap Q_j \in \{P_i, Q_j, \varnothing\}. \tag{2}$$

A magyarországi felsőoktatásban a kvóták hierarchikus rendszert alkotnak, ha az egyes képzésekre vonatkozó keretszámokon túl több intézményre vagy szakcsoportokra együttes kvótákat határoznak meg. Megadhatnánk további kvótákat szakonként, karonként és intézményi szinten is. Például a Maastrichti Egyetem közgazdasági karán évente hat doktorandusz kap ösztöndíjat, amelyből a hat tanszék mindegyike legfeljebb kettőt kaphat meg.

10. TÉTEL. *Legyen $\mathcal{C}$ az iskolák, $\mathcal{S}$ pedig a hallgatók halmaza; jelölje P a preferenciáikat, q pedig egy kvótafüggvényt. Az így definiált $(\mathcal{C}, \mathcal{S}, P, q)$ felvételi problémára a hallgatóoptimális vonalhúzási algoritmus stabil párosítást eredményez, ha q hierarchikus.*[10]

A bizonyítás konstruktív. Ha többszintű keretszámokkal dolgozunk, az algoritmust némileg módosítani kell. Adottnak tekintve a hallgatók és a szakok preferenciáit, a többszintű keretszámok esetén a felvételi ponthatárok meghatározása, azaz a párosítás a következőképpen történik.

1. Minden hallgató az általa első helyen megjelölt szakot választja.

2. Minden egyes iskolához rendelünk egy ponthatárt. Ha az iskolát a kvótájánál kevesebben választják, akkor a ponthatár a legalacsonyabb pontszámmal jelentkező hallgató pontszáma, egyébként pedig a legalacsonyabb (természetes) szám, amelyre még igaz, hogy

[10] A tételt, tőlünk függetlenül *Biró és szerzőtársai* [2009] is igazolta. Ők egy kicsit más terminológiát használnak: az általunk magasabb szintűnek nevezett kvótákat közösnek *(common)*, a hierarchikus kvótákat pedig bennfoglaltnak *(nested)* nevezik.

a ponthatár feletti jelentkezések a kvóták alapján még mind felvehetők; minden más hallgatót elutasítanak, jelentkezésüket töröljük.

3. A kvóták hierarchiája mentén feljebb lépegetve, ellenőrizzük, hogy a jelentkezők nem lépik-e túl a kvótát. Az iskolák valamely P halmazánál egy összesített rangsor készül a felvételi pontok alapján, és a kvótán felüli jelentkezéseket töröljük. Ezt a vizsgálatot a hierarchiában felfelé haladva minden szinten el kell végezni.

4. Ha az elutasított hallgatóknak van még további jelentkezése, akkor a sorrendben a legelöl elhelyezkedő élő jelentkezésüket választják.

Ha nincs további jelentkezésük, akkor az elutasított hallgatók nem nyernek felvételt, a felvételi ponthatárok pedig az utolsó értéken rögzülnek.[11]

Az algoritmus tulajdonképpen a késleltetett elfogadási algoritmus általánosítása, így az ott alkalmazott módon igazolható, hogy a kapott párosítás stabil, illetve – konstrukciójából adódóan – hallgatóoptimális. ■

Nem hierarchikus keretszámok esetén az algoritmus nem mindig eredményez stabil párosítást.

2. PÉLDA. *Legyen* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ és $\mathcal{S} = \{s_1, ..., s_6\}$. *A preferenciák a következők szerint alakulnak:*

$$\begin{aligned} \textit{ha } C_i \in \mathcal{C}, \text{ akkor } P(C_i) &= s_1, s_2, ..., s_6 \\ P(s_1) = p(s_2) &= C_1 \\ P(s_3) = p(s_4) &= C_2 \\ P(s_5) = p(s_6) &= C_3; \end{aligned}$$

végül ha $i \in \{1, 2, 3\}$, $q(\{C_i\}) = 2$, $q(\{C_1, C_2\}) = q(\{C_2, C_3\}) = 3$, $q(\mathcal{C}) = 5$.

Az algoritmus harmadik lépésében a $\{C_2, C_3\}$ halmaz vizsgálatánál s_6, míg $\{C_1, C_2\}$ vizsgálatánál s_4 kerül elutasításra, holott s_4 elutasítása egyszerre megoldja mindkét problémát. Így tulajdonképpen az első elutasítással visszakozhatunk, de mivel erre az algoritmus nem ad lehetőséget, a (C_3, s_6) páros blokkolhatja a kapott eredményt. Érdekes, hogy itt s_6 a nála jobb pontszámmal hallgató, s_4 kiesésével biztosíthatja a helyét. Ha a keretszámok nem hierarchikusak, a stabil párosítások meghatározása, sőt létezésük igazolása is NP-teljes probléma (*Biró és szerzőtársai* [2009]).

A magyar felsőoktatási rendszerben a kvótákat több dimenzió mentén is meghatározzák. Léteznek szakonként, országos szinten keretszámok, illetve intézményi szinten kapacitáskorlátok. Mivel azonban az intézményekben az egyes szakokra megadott kvótákat pontosan a kapacitások figyelembevételével additív módon határozták meg, a többszintű rendszer hierarchikus. Ebből két dolog következik.

1. A vonalhúzási algoritmus jól működhet a többszintű kvóták ellenére is.
2. Az intézmények számára nem kis gondot okoz az egyes szakokra vonatkozó kvóták meghatározása.

Egy olyan rendszerben, ahol az intézmények a kapacitásuk minél jobb kihasználásával tudják csak biztosítani finanszírozásukat, fontos, hogy ne maradjon kitöltetlen kvóta, ha más szakon, tagozaton stb. túljelentkezés van. Mivel a jelentkezéseket nem lehet ponto-

[11] Ha egy intézményhez egyáltalán nem érkezik jelentkezés, a ponthatár lényegtelen, tetszőlegesen megválasztható.

san előre megjósolni, megoldásként marad a keretszámok utólagos kiigazítása, bár sokkal egyenesebb megoldás lenne a nem hierarchikus többszintű keretszámok használata. Sajnos, ebben az esetben nem mindig létezik stabil párosítás, sőt még a kérdés eldöntése is NP-teljes probléma (*Biró és szerzőtársai* [2009]).

LEGKISEBB INDULÓ LÉTSZÁMOK. Bár egyrészről az intézmények szeretnének minél több hallgatót felvenni, gazdaságos működésükhöz szükséges, hogy megadják a minimális induló létszámot. Minimális induló létszám esetén csak akkor indul el egy képzés, ha a felvehető hallgatók száma eléri ezt az alsó korlátot vagy alsó kvótát, ellenkező esetben a rá leadott jelentkezések törlésre kerülnek.

Ez a szempont a párosítások korai alkalmazásaiban egyáltalán fel sem merül. Házassági piacokon *egy az egyhez* párosításról van szó, azaz a kvóta mindig 1. Így valaki vagy párosításra kerül, vagy nem, s ha párosításra kerül, a (stabil párosítás esetén) konstrukcióból adódóan örömmel elfogadja partnerét. A már bevezetőnkben is említett rezidensképzés fő mozgatórugói a kórházak, amelyek a rezidensekben elsősorban jól képzett, olcsó munkaerőt látnak. Minden egyes rezidens pénzt hoz, így itt inkább az okoz problémát, ha egy kórház nem tud annyi rezidenst felvenni, mint szeretne. Az általános iskolai párosításoknál (*Abdulkadiroğlu–Pathak–Roth* [2005], *Teo–Sethuraman–Tan* [2001]) pedig semelyik iskola sem marad tanulók nélkül, hiszen a párosításból kimaradt jelentkezőket szétosztják a maradék helyekre.

A magyar helyzet abból a szempontból speciális, hogy az intézményeknek viszonylag kevés lehetőségük van a népszerűtlenebb programok átszervezésére. Míg a nyugat-európai országokban két-három fővel is elindulhat egy mesterképzés, hiszen a kurzusok jelentős része összevonható más programokkal, Magyarországon gyakorlatilag egy teljes programot kellene biztosítani a szóban forgó hallgatóknak. Sajnos, ez egy objektív akadály, amely ugyanakkor erőteljes hatással van a párosításokra.

Az alsó kvótákkal ismét a stabil párosításoknak egyik alapvető feltétele sérül: ez esetben az iskolák preferenciái nem fogékonyak, hiszen egy nem triviális legkisebb induló létszám esetén az iskola szívesebben tölti fel „saját magával" a helyeit (ez esetben nem vesz fel senkit), semhogy egy, amúgy felvehető hallgató jelentkezését elfogadja.

11. TÉTEL. *Az olyan felvételi problémáknak, ahol megengedünk minimális induló létszámot is, nem mindig van stabil párosítása.*

A tétel igazolása egyszerűen egy ellenpéldával történik (lényegében: *Biró–Fleiner* [2008]). A példában $\underline{q}(C)$-vel jelöljük a C szakra vonatkozó alsó kvótát.

3. PÉLDA. *Két szakról és két hallgatóról lesz szó.* $\underline{q}(C_1) = q(C_1) = 1$, $\underline{q}(C_2) = q(C_2) = 2$; $P(C_1) = P(C_2) = s_1, s_2$. $P(s_1) = C_2, C_1, p(s_2) = C_1, C_2$.

A következő párosítások lehetségesek:

C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
s_1	(nem indul)	s_2	(nem indul)	(nem indul)	s_1, s_2
	A		B	C	

Az A esetben mind s_1, s_2 és természetesen C_2 is preferálná a C párosítást, tehát ez a koalíció blokkolhatja A-t. A B párosítást $\{s_1, C_1\}$, a C párosítást pedig $\{s_2, C_1\}$ blokkolja.[12]

[12] Érdekesség, hogy az A párosítást semelyik pár nem blokkolja, tehát az ilyen párosításokra nem igaz az az észrevétel, hogy a csoportos blokkolás ekvivalens a blokkoló párok létezésével, hacsak nem feltételezzük, hogy itt s_2 tulajdonképpen kitartott C_2 mellett, csupán a induló minimumlétszám miatt ez a döntés nem látható a párosításban.

A példa semmiképpen sem egyedi. Általában előfordulhat, hogy az alsó kvóták miatt nincs stabil párosítás. *Biró és szerzőtársai* [2009] igazolta, hogy már a létezés kérdésének eldöntése is NP-teljes probléma.

A jelenleg használt hüvelykujjszabály szerint azt a szakot nem indítjuk el, ahol a jelentkezők aránya a legkisebb induló létszámhoz képest a legkisebb, majd ezt az elvet szükség szerint ismételjük.[13]

A minimális induló létszámok megállapítása tehát – bár ártatlan és természetesen szükségszerű módosítás – sajnos éppen a vonalhúzási algoritmus fő erényét, a stabilitást veszélyezteti.

Kétféle finanszírozási forma. A szakok többsége egyszerre indul államilag finanszírozott és költségtérítéses formában is. Míg az előbbi a hallgatóknak ingyenes, az utóbbiért fizetni kell, tartalmilag nincs különbség: a kétféle finanszírozási formát „választók” egymás mellett ülnek az iskolapadban.

Önmagában az, hogy két ponthatár nem határozható meg egymástól teljesen függetlenül, akár jelenthetne problémát is, azonban itt egy nagyon speciális esetről van szó, hiszen aki jelentkezik költségtérítéses képzésre, az valószínűleg jelentkezik a szak államilag finanszírozott formájára is (ez alól csak a külföldiek, illetve az állami finanszírozást már elhasználók jelentenek kivételt). Mivel a képzés a finanszírozási formától függetlenül történik, az államilag finanszírozott és a költségtérítéses hallgatókra vonatkozik egy közös kvóta is, amit az intézményi kapacitás határoz meg. Ennek tükrében a vonalhúzás – gyakorlatilag – a következőképpen történik: első körben az államilag finanszírozott helyeket osztják ki, hiszen minden hallgató ezeket előbbre sorolja. Ha az intézmény/képzés kapacitása még engedi, akkor van lehetőség az államilag finanszírozott helyekre be nem került hallgatók felvételére. Ezek után alkalmazhatók az esetleges magasabb szintű felvételi korlátok.

Pontegyenlőség. A magyar felsőoktatási felvételi rendszerben az intézmények nem a hagyományos értelemben vett preferenciákkal rendelkeznek, hanem a jelentkezők részben korábbi tanulmányi eredményeik, részben egyéb „hozott pontok” alapján kerülnek rangsorolásra. A hallgatók maximális pontszáma 2007 előtt 144, a reform óta 480 pont.[14] Ha tekintetbe vesszük, hogy egy 50 százalékos érettségi eredmény duplázva 200 pontot ér, látható, hogy a körülbelül százezer hallgató fejenként több jelentkezése, illetve az azokra számított pontszámok egy viszonylag szűk tartományon belül helyezkednek el, sok holtversenyt eredményezve. Ez még akkor is igaz, ha természetesen a pontegyenlőségeknek csak a szakokon belül van jelentősége. Hagyományosan a párosítások elmélete szigorú preferenciákat feltételez, ugyanakkor az elmélet általánosítható: a megoldás az egyenlőség tetszőleges módon való feloldása. A bostoni általános (*Alcalde* [1996], *Abdulkadiroğlu és szerzőtársai* [2005]) és a New York-i középiskolák (*Abdulkadiroğlu és szerzőtársai* [2005]) esetében a hallgatókat véletlenszerűen rangsorolják, s ha két hallgató a kritériumoknak egyformán felel meg, illetve egyforma pontszámmal rendelkezik, akkor az eredeti rangsort veszik figyelembe. A magyar középiskolák esetében az egyenlőséget a felvételi bizottság önkényesen, bár rendszerint jól megfogalmazott elvek alapján oldja fel, mint például egy matematika tagozatra az egyenlő pontszámmal hallgatók közül a jobb a matematika osztályzattal jelentkező kerül előbbre. A magyar vagy a spanyol felsőoktatási felvételi esetében az egyenlőségeket tényleges holtversenyként kezelik, így ha egy 390 pontos hallgató nem kerül be egy adott szakra, akkor ugyanoda egy másik 390 pontos hallgató ugyanígy nem nyerhet felvételt (*Romero-Medina* [1998]). Természetesen egy iskola, amennyiben a

[13] Az Educatio Kht. személyes tájékoztatása, illetve *Biró és szerzőtársai* [2009] alapján.

[14] Ez a szám a jövőben várhatóan tovább, 500-ra emelkedik.

szóban forgó jelentkezők elfogadhatók számára, bármelyikőjüket szívesen felvenné, ezzel a párosítás stabilitása sérül.

Természetesen előfordul, hogy a kvóta alapján az utolsó csoportot részben lehet csak felvenni. A spanyol rendszerben az egyenlő elbánás módját mindig pozitív értelemben alkalmazzák: a csoport kvótán felüli tagjait is automatikusan felveszik. A magyar rendszerben maradhatnak betöltetlen helyek. Mivel az iskola a lemaradók bármelyikét szívesen felvenné, sérül a stabilitás.

A vonalhúzási algoritmus megengedi a pontegyenlőséget, viszont a legszigorúbb értelemben alkalmazza az egyenlő elbánás elvét: ha a keretszám 100 felvételt enged, és 101 holtversenyes hallgató van, akkor elvileg a ponthatár már nem vihető lejjebb. *Jankó* [2009] mutat egy példát, amelyben a mereven értelmezett kvóták miatt a holtversenyes jelentkezők csak a legrosszabb helyre nyerhetnek felvételt, míg némi taktikázással vagy a párosítás blokkolásával ennél jobb eredmény is elérhető. A szigorúan értelmezett kvóták és holtversenyek mellett tehát elveszítjük a stabilitást és a jelentkezők őszinteségét.

A gyakorlatban Magyarországon sem jelent automatikus elutasítást, ha egy csoport nem fér be a megadott kvótába, utóbbit ugyanis csak iránymutatóként alkalmazzák, és a legtöbb esetben van lehetőség a létszám kismértékű bővítésére. A kvóták utólagos korrekciója pontosan az ilyen szélsőséges helyzeteket tudja részben orvosolni, arra viszont nincsen lehetőség, hogy mindenhol tökéletesen ki lehessen tölteni a keretszámokat. Ebben az értelemben a pontegyenlőségek hatékonyságvesztéshez vezetnek. Ez a veszteség annál kisebb, minél ritkábbak a holtversenyek. Már önmagában a felvételi pontok maximumának 144-ről 480-ra emelése drámai lépés. Míg Bostonban, ahol a hallgatókat mindössze két bináris jellemző alapján, összesen 4 kategóriába sorolják,[15] tömeges holtversenyek alakulhatnak ki, a vizsgált felsőoktatási felvételi esetén a holtversenyek ritkábbak, így a pontegyezések feloldása kevésbé fontos.

Megfontolandó lenne ugyanakkor a középiskolai felvételinél alkalmazott heurisztikák formalizálása, hivatalos alkalmazása itt is: például ha pontegyezés esetén előbb nyer felvételt az a pályázó, akinek a többletpontok nélkül magasabb a pontszáma. Ilyen és hasonló szabályokkal csökkenthető a holtversenyek esélye, a betöltetlen helyek száma, kevesebb lenne a nagyszámú betöltetlen hely miatti való utólagos korrekció, és általában átláthatóbb lenne a felvételi folyamata. Természetesen nem a véletlenszerű rangsorolás az egyetlen alternatíva. *Erdil–Ergin* [2008] javasol egy gyors algoritmust, amely Pareto-optimális módon oldja fel a holtversenyeket.

Jelentkezési korlátok. Míg az eddigiekben a felvehető hallgatókkal kapcsolatos korlátokról volt szó csupán, most visszakanyarodunk a felvételi folyamat legelejére, vagyis a jelentkezési lap kitöltéséhez. A felsőoktatási felvételi esetében a felvételi lapon csak három intézmény/szak/tagozat stb. jelölhető meg, minden további jelentkezésért kiegészítő díjat kell fizetni. Mivel a szabályok és a hallgatók száma évről évre igen hektikusan változik, és mivel a jelentkezés pillanatában a hallgató legjobb esetben is csak egy becsléssel rendelkezhet a felvételi pontszámát illetően, csak a teljes preferencialista megadásával biztosíthatja, hogy az általa elérhető legjobb helyre nyerjen felvételt.

Mielőtt rátérnénk a jelentkezési korlátok okozta problémák elemzésébe, szeretnénk néhány gyakori félreértést tisztázni. Kézenfekvő azt mondanunk, hogy az a hallgató, aki pontosan az elérhető legjobb helyet hagyja ki a jelentkezési lapról, meg is érdemli a sorsát. Nos, itt a hangsúly az elérhetőn van. Az elérhető legjobb a többi hallgató jelentkezésére adott legjobb válasz esetén elnyert hely, ami a legritkább esetben egyezik a legjobb hellyel. Ennek

[15] Előnyt élvez, akinek testvére már jár az adott iskolába, majd ezek után az, aki gyalogtávolságra lakik; természetesen első helyre azok kerülnek, akikre mindkettő teljesül.

meghatározásához pedig még jól definiált, lineáris preferenciák esetén is ismerni kellene a saját érettségi eredményeken túlmenően a többi hallgató (egyensúlyi) jelentkezését.

Bár aligha van olyan hallgató, aki a képzések, szakok teljes listáját rangsorolni kívánja, valószínű, hogy sokak számára korlát a három jelentkezés, hiszen ennél több elérhető és elfogadható szakra is jelentkeznének. Ennek némileg ellentmond, hogy a hallgatók közel egyharmada még a három lehetőséget sem tölti ki.[16]

Mivel kevés a teljesen egyedülálló képzés, a népesebb szakokon pedig viszonylag magas pontszámmal lehet a legjobb helyekre bekerülni (és így egy intézményt megjelölni igen kockázatos lehet), úgy gondoljuk, hogy utóbbi inkább tájékozatlansággal, a felvételi rendszer hiányos ismeretével magyarázható. Van, aki magabiztosságot, elkötelezettséget kíván jelezni a megengedettnél kevesebb jelentkezéssel, holott ma már a központi, algoritmizált felvételi párosítás során az ilyen „jelzéseknek” semmi jelentőségük nincs. Természetesen a jobb tájékoztatás, alaposabb tájékozódás sokat segíthet ezeken a furcsa stratégiákon, de kérdés, hogy egyáltalán probléma-e, ha valaki kevés helyre jelentkezik, illetve probléma-e, ha a jelentkezések számát korlátozzuk.

A magyarországi modell speciális, hiszen elvben tetszőleges számú intézmény rangsorolható, ugyanakkor a további szakok megjelölését kiegészítő díjjal bünteti a rendszer. Aligha véletlen, hogy a jelentkezők közel fele pontosan három szakra adott be jelentkezést, míg négyre és ötre mindössze 9-10, illetve 5-6 százalék *(2. táblázat)*. Szembetűnő az is, hogy 2008-ban, amikor a jelentkezéskor még úgy látszott, hogy nem lesznek ingyenes képzések, tehát a legszegényebbek eleve kiestek, a csökkenés éppen a három szakot megjelölőket érintette a leginkább: a nominális csökkenés mellett arányaiban is csökkent a pontosan három jelentkezést leadók száma. Ha sok más rendszerhez hasonlóan korlátosnak bizonyul a jelentkezések száma, nyilvánvalóan sérül az őszinteség és akár a stabilitás is.

2. táblázat

A jelentkezések szám szerinti százalékos megoszlása, 2007–2009

Darab	2007	2008	2009
1	14,2	15,0	16,8
2	14,1	14,1	15,8
3	46,5	44,7	48,3
4	10,4	10,2	8,8
5	6,5	6,5	4,9
6+	8,3	9,4	5,3

Forrás: Educatio Kht.

A továbbiakban feltételezzük, hogy minden hallgató legfeljebb k szakra adhat be jelentkezést. Mivel a következő eredmények sehol sem használják ki, hogy a hallgatók csak egyforma hosszúságú listákat adhatnak meg, így kiindulhatunk abból, hogy anyagi és tanulmányi helyzete alapján minden hallgató számára létezik egy optimális hosszúságú jelentkezési lista, és a továbbiakban ezzel dolgozunk (*Haeringer–Klijn* [2009]).

A probléma alaposabb tanulmányozásához kicsit formalizáljuk a fejezet elején tárgyalt stratégiai modellt! Egy adott P preferenciaprofil és k jelentkezési korlát esetén jelölje Q^k a hallgatók által megadott, darabonként legfeljebb k elemű preferenciaprofilt!

Mivel az iskolák nem viselkednek stratégiai játékosként, konkrétan: a hallgatókra vonatkozóan nem adnak valóstól eltérő preferenciákat, elegendő a felvételizőket mint játékosokat

[16] 2009-ben a jelentkezők 32,67 százaléka csak egy vagy két helyet jelölt meg (*Forrás:* Educatio Kht.).

vizsgálnunk. Így, a játék leírható egy $(\mathcal{S}, P, \mathcal{Q}^k)$ hármasként, ahol $\mathcal{S}$ a hallgatók halmaza, P a hozzájuk tartozó és az iskolákra vonatkozó preferenciaprofil, $\mathcal{Q}^k$ pedig a legfeljebb k hosszúságú megadott preferenciaprofilok halmaza. A P preferenciák éppúgy alkalmazhatók párosításokra, mint intézményekre, hiszen a modell externáliáktól mentes; a hallgatókat csakis az érdekli, hogy melyik intézménybe nyernek felvételt. Így pontosan akkor $\mu >_s \mu'$, ha $\mu(s) >_s \mu'(s)$.

Ha $Q \in \mathcal{Q}^k$, akkor Q_s az s hallgató preferenciáit jelöli, míg Q_{-s}-en a többi játékos által Q-ban megadott preferenciaprofilt értjük. Így tehát $Q = (Q_s, Q_{-s})$. Egy ϕ párosítási mechanizmus minden megadott preferenciaprofilhoz rendel egy párosítást, melyet $\phi(Q)$-val jelölünk. Az eredeti P preferenciaprofilhoz tartozó, legfeljebb k hosszúságú jelentkezési lapokhoz tartozó Nash-egyensúlyon[17] azt a $Q^k \in \mathcal{Q}^k$ megadott preferenciaprofilt értjük, amelyre teljesül, hogy bármely s hallgatóra és bármely Q'_s megadott preferenciasorra

$$\phi(Q_s, Q_{-s}) >_s \phi(Q'_s, Q_{-s}).$$

A továbbiakban az egyensúlyi stratégiák meghatározása a cél.

A jelentkezési korlátok nélkül alkalmazott hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmusban (és így az azzal ekvivalens vonalhúzó algoritmusban is) gyengén domináns stratégia a teljes preferencialista felfedése. Jelentkezési korlátok mellett erre jellemzően nincs lehetőség, létezik ugyanakkor a stratégiáknak egy dominálatlan részhalmaza.

1. ÁLLÍTÁS. (*Haeringer–Klijn* [2009]) *A k korlát esetén a következő stratégiahalmaz dominálatlan.*

1. *Ha egy hallgató nem több, mint k programot tart elfogadhatónak, akkor nem járhat jobban, mint valós preferenciái felfedésével.*
2. *Ha egy hallgató több, mint k programot tart elfogadhatónak, akkor nem járhat jobban, mint mikor egy olyan stratégiát alkalmaz, ahol az elfogadható szakok közül k darabot kiválaszt, és ezeket a valós preferenciáinak megfelelő sorrendben adja meg.*

Mint már korábban kimondtuk, a preferenciamegadó játéknak bármilyen jelentkezési korlát esetén lesz egyensúlya. A *12. tétel* már többet is elárul az egyensúlyokról.

12. TÉTEL (*Haeringer–Klijn* [2009]). *Ha a Q^k preferenciaprofil Nash-egyensúlyt alkot a k jelentkezési korlátú játékban, akkor szintén Nash-egyensúlyt alkot a k' jelentkezési korlátú játékban is, ha $k' \geq k$.*

Ha az egyensúlyokat tisztáztuk, vissza kell térnünk arra az alapvető kérdésre, hogy az egyensúlyi stratégiaprofilok alapján meghatározott párosítások mennyire felelnek meg az eredeti preferenciáknak, vagyis stabil-e a párosítás a valós preferenciák tükrében. Az *1. lemma* a bostoni algoritmust vizsgálja:

1. LEMMA (*Ergin–Sönmez* [2006]). *Jelölje P a valós preferenciákat, és legyen Q^* a preferenciamegadási játék valamely Nash-egyensúlya a bostoni mechanizmus alkalmazása és a $k = 1$ jelentkezési korlát esetén. Ekkor a Q^* párosítás stabil a P preferenciák szerint.*

Bár a lemma nem feltételez jelentkezési korlátokat, a bostoni mechanizmus konstrukciójából adódóan egyensúlyban csak az első helyes jelentkezések számítanak. Így $Q^* = Q^{1*} = Q^{k*}$. Visszatérve a vonalhúzási, azaz a hallgatóoptimális késleltetett elfogadási

[17] Ilyen egyensúly mindig létezik, de előfordulhat, hogy csak kevert stratégiákban, ami rendkívül bonyolulttá teszi a preferenciasorok megadását.

algoritmusra, elsőként megállapítjuk, hogy $k = 1$ esetén a bostoni és a vonalhúzási algoritmus ugyanazt a párosítást adják, tehát az *1. lemmából* adódik a *4. következmény.*

4. KÖVETKEZMÉNY. *Jelölje P a valós preferenciákat, és legyen Q^* a preferenciamegadási játék valamely Nash-egyensúlya a vonalhúzó algoritmus mint párosítási mechanizmus alkalmazása és a $k = 1$ jelentkezési korlát esetén. Ekkor a Q^* párosítás stabil a P preferenciák szerint.*

Ez azt jelenti, hogy ha minden hallgató csak egy szakot jelölhet meg, akkor is kitöltheti úgy a jelentkezési lapot, hogy a vonalhúzó algoritmus által megadott párosítás
1. stabil a megadott preferenciák alapján, és
2. stabil a valódi preferenciák alapján.

Az egyensúly megadása sem nehéz. Vegyük ugyanis a jelentkezési korlátok nélküli esetet! A vonalhúzó algoritmus minden hallgatót az általa elérhető legjobb szakhoz sorolja. Ha ezek után minden hallgató pontosan ezt a szakot írja a jelentkezési lapjára, akkor pontosan ugyanez a párosítás jön létre. Az is világos, hogy egy ennél – a valós preferenciák szerint – jobb, tehát már nem elérhető szakot beírni botorság, hiszen a szak pontosan azért nem volt elérhető, mert vagy kitöltötték jobb hallgatók a felvételi keretet, vagy a hallgató eleve elfogadhatatlan a szak számára; rosszabb szak beírásával pedig nem nyerhet a hallgató.

Mivel a *12. tétel* alapján ez az egyensúly minden magasabb jelentkezési korlát mellett is megmarad, az *5. következményt* kapjuk.

5. KÖVETKEZMÉNY. *Jelölje P a valós preferenciákat és $\mathcal{Q}^*$ a preferencia-megadási játék Nash-egyensúlyainak halmazát a vonalhúzó algoritmus mint párosítási mechanizmus alkalmazása és a $k = 1$ jelentkezési korlát esetén. Ekkor létezik olyan a $Q^* \in \mathcal{Q}^*$, amely stabil párosítást eredményez a P preferenciák szerint.*

Sajnos a stabilitás nem igaz minden Nash-egyensúlyra. Tekintsük a következő példát!

4. PÉLDA (*Haeringer–Klijn* [2009] 6.2. *példa*). *Legyen $\mathcal{S} = \{s_1, s, s_3\}$ a hallgatók, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ az iskolák halmaza. Feltételezzük, hogy minden iskolába legfeljebb egy hallgató vehető fel, és hogy a jelentkezéskor legfeljebb $k = 2$ hely pályázható. A preferenciák a következők:*

$$\begin{aligned} P(s_1) &= \underline{C_1}, C_3, C_2 \\ P(s_2) &= C_3, C_1, \underline{C_2} \\ P(s_3) &= \underline{C_3}, C_2, C_1 \\ P(C_1) = P(C_2) &= s_3, s_1, s_2 \\ P(C_3) &= s_1, s_2, s_3 \end{aligned}$$

Legyen továbbá

$$\begin{aligned} Q(s_1) &= C_1, C_3 \\ Q(s_2) &= C_1, C_2 \\ Q(s_3) &= C_3, C_1 \end{aligned}$$

A Q alapján készített párosítást aláhúzással jelöltük a valódi preferenciák között. Látható, hogy bár Q egyensúlyi, a párosítást blokkolja a $\{s_2, C_3\}$ páros.

A résztvevők számának növekedésével az ilyen esetek egyre gyakoribbak lesznek. Milyen esetekben remélhetjük tehát, hogy minden egyensúlyi párosítás stabil a valódi preferenciák alapján? A kérdés megválaszolásához szükségünk van a *7. definícióra.*

7. DEFINÍCIÓ (*Ergin* [2002]). *Legyen P_S az iskolákhoz tartozó preferenciaprofil, q pedig kvótákból álló vektor. Jelölje $U_C(s) = \{t \in \mathcal{S} | t >_C s\}$ a C által az s hallgatónál előrébb sorolt hallgatók halmazát. Egy ciklus olyan, páronként különböző C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ iskolákból és* $s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$ hallgatókból áll, hogy a következők teljesülnek:

CIKLIKUSSÁGI FELTÉTEL $s_1 >_{C_1} s_2 >_{C_1} s_3 >_{C_2} s_1$, *illetve*
HIÁNYFELTÉTEL *léteznek a hallgatóknak olyan S_1, $S_2 \subset \mathcal{S} \backslash \{s_1, s_2, s_3\}$ részhalmazai, hogy* $N_1 \subset U_{C_1}(s_2)$, $N_2 \subset U_{C_2}(s_1)$ és $|N_1| = q_1 - 1$, *illetve* $|N_2| = q_2 - 1$.

Egy preferenciastruktúra Ergin-aciklikus, ha mentes a fent leírt ciklusoktól.

Ergin [2002] közvetlen megoldást is megad a ciklikusság azonosítására.

13. TÉTEL (*Haeringer–Klijn* [2009]). Legyen $k \neq 1$. *Az iskolák P_S preferenciaprofilja akkor és csak akkor Ergin-aciklikus, ha a preferenciamegadási játék Nash-egyensúlyain lefuttatott vonalhúzási algoritmus által eredményezett párosítások minden egyes P kiterjesztésére stabilak a valós preferenciák alapján.*

Természetesen a vonalhúzási algoritmus a megadott preferenciákhoz képest mindig stabil párosítást eredményez – ez itt is igaz marad. A stabilitás is garantált bizonyos speciális esetekben, például ha a szakokhoz tartozó preferenciák egybeesnek. Sajnos ez már kismértékű eltérések esetén sem marad mindig igaz. Így valószínű, hogy a magyarországi felsőoktatási felvételiben az iskolák preferenciaprofilja nem Ergin-aciklikus, és a korlátozott jelentkezéseken alapuló felvételi párosítás sem feltétlenül stabil a valós preferenciák szerint.

Összefoglalás

A vonalhúzó algoritmus, a felsőoktatási felvételi rendszer tulajdonképpeni motorja ekvivalens a stabil párosításokat eredményező hallgatóoptimális késleltetett elfogadási algoritmussal. Nincs tehát jogos irigység, nincs olyan hallgató, akit a pontszáma alapján egy jobb helyre is felvehettek volna, de mégsem oda került.

Az algoritmus speciálisan magyar részletei többnyire megőrzik ezt a tulajdonságot. Így a hierarchikus rendszert alkotó felvételi-keretszámok, a kétféle finanszírozási forma, illetve a pontalapú értékelésből fakadó holtversenyek mind megengedhető változások. Ugyanakkor, ha legkisebb induló létszámokat is megadhatunk, sérül a fogékonysági feltétel, és már nem garantált a stabilitás.

A Gale–Shapley-algoritmus gyengéje, hogy a párosítás résztvevőinek általában nem áll érdekében felfedni valós preferenciáikat – itt ugyanakkor éppen egy speciális esetről van szó: mivel az iskolák nem stratégiai megfontolások alapján határozzák meg preferenciáikat, a hallgatóknak pedig érdeke a valós preferenciák megadása (hiszen a párosítás ezekhez képest lesz optimális), ezért itt mindkét fél felfedi valós preferenciáit.

Sajnos az alkalmazott felvételi eljárás során az őszinteség költséges. Mivel a megadott jelentkezések száma szerint kell növekvő összeget fizetni az eljárásért, a hallgatók többsége csak minimális számú jelentkezést ad meg. Bár ekkor is létezik a preferenciaválasztási játéknak olyan Nash-egyensúlya, amely az eredeti preferenciák szerint is stabil párosítást eredményez. Sőt, ha a szakok preferenciái Ergin-aciklikusak, ez minden egyensúlyra igaz.

Mit jelent az, hogy a preferenciaválasztási játék valamely Nash-egyensúlyához tartozó párosítás stabil? A hallgatók képesek úgy manipulálni preferenciáikat, hogy a megadott preferenciák egyensúlyt alkotnak, és ugyanakkor a kapott párosítás stabil, tehát minden hallgatót az általa elérhető legjobb szakra veszik fel. Az ilyen egyensúly elérésének koordinációs, információs feltételei a felsőoktatási felvételi során nem teljesülnek. Marad a valóstól többnyire eltérő, taktikázva, spekulálva meghatározott preferenciák megadása, ami nem kis feladat. Az okozott probléma ráadásul teljesen felesleges, pusztán a felvételi eljárás lebonyolításából adódik.

Hivatkozások

Abdulkadiroğlu, A.–Pathak, P. A.–Roth, A. E. [2005]: The New York City High School Match. American Economic Review, Vol. 95. No. 2. 364–367. o.

Abdulkadiroğlu, A.–Pathak, P. A.–Roth, A. E.–Sönmez, T. [2005]: The Boston Public School Match. American Economic Review, Vol. 95. No. 2. 368–371. o.

Abdulkadiroğlu, A.–Pathak, P. A.–Roth, A. E.–Sönmez, T. [2006]: Changing the Boston School Choice Mechanism. Boston College Working Papers in Economics 639, Boston College Department of Economics.

Abdulkadiroğlu, A.–Sönmez, T. [2003]: School Choice: A Mechanism Design Approach. American Economic Review, Vol. 93. No. 3. 729–747. o.

Alcalde, J. [1996]: Implementation of Stable Solutions to Marriage Problems. Journal of Economic Theory, Vol. 69. No. 1. 240–254. o.

Biró Péter [2007]: Higher Education Admission in Hungary by a Score-limit Algorithm. The 18th International Conference on Game Theory at SUNY at Stony Brook.

Biró Péter [2008]: Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged. Technical Report TR-2008-291, University of Glasgow, Department of Computing Science, Glasgow.

Biró Péter–Fleiner Tamás–Irving, R.–Manlove, D. [2009]: The College Admissions problem with lower and common quotas. DCS Technical Report TR-2009-303, University of Glasgow, Department of Computing Science, Glasgow.

Biró Péter–Fleiner Tamás [2008]: A magyarországi felvételi besoroló algoritmusok rövid bemutatása. Felvi.hu, http://www.felvi.hu/felsooktatasimuhely/Algoritmusok/a_magyarorszagi_felveteli_besorolo_algoritmusok_rovid_bemutatasa?itemNo=1.

Braun, S.–Dwenger, N.–Kübler, D. [2007]: Telling the Truth May Not Pay Off: An Empirical Study of Centralised University Admissions in Germany. IZA Discussion Papers 3261, Institute for the Study of Labor (IZA).

Erdil, A.–Ergin, H. [2008]: What's the Matter with Tie-Breaking? Improving Efficiency in School Choice. American Economic Review, Vol. 98. No. 3. 669–689. o.

Ergin, H.–Sönmez, T. [2006]: Games of School Choice under the Boston Mechanism. Journal of Public Economics, Vol. 90. No. 1–2. 215–237. o.

Ergin, H. I. [2002]: Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities. Econometrica, Vol. 70. No. 6. 2489–2497. o.

Gale, D.–Shapley, L. [1962]: College Admissions and the Stability of Marriage. American Mathematical Monthly, Vol. 69. 9–15. o.

Haeringer, G.–Klijn, F. [2009]: Constrained School Choice. Journal of Economic Theory, Vol. 144. No. 5. 1921–1947. o.

Jankó Zsuzsanna [2009]: Stabil párosítások és egyetemi felvételi ponthatárok. Szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest.

Kagel, J. H.–Roth, A. E. [2000]: The Dynamics of Reorganization in Matching Markets: A Laboratory Experiment Motivated by a Natural Experiment. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 115. No. 1. 201–235. o.

Kóczy Á. László [2008]: A stabil párosítások szakirodalmának, ezen belül a felvételi rendszerek elemzéséhez kapcsolódó eredmények összefoglalása és ismertetése. A közoktatás teljesítményének mérése-értékelése, az iskolák elszámoltathatósága című programjának 1401. számú produktuma, Magyar Tudományos Akadémia, Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

Kóczy Á. László [2009]: Központi felvételi rendszerek: taktikázás és stabilitás. Közgazdasági Szemle, 56. évf. 5. sz. 422–442. o.

Romero-Medina, A. [1998]: Implementation of Stable Solutions in a Restricted Matching Market. Review of Economic Design, Vol. 3. No. 2. 137–147. o.

Roth, A. E. [1984]: The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory. Journal of Political Economy, Vol. 92. No. 6. 991–1016. o.

Roth, A. E. [1985]: The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage Problem. Journal of Economic Theory, Vol. 36. No. 2. 277–288. o.

Roth, A. E. [1986a]: On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets. Econometrica, Vol. 54. No. 2. 425–27. o.

Roth, A. E. [1986b]: On the Non-transferable Utility Value. Econometrica, Vol. 54. No. 4. 981–984. o.

Roth, A. E. [1991]: A Natural Experiment in the Organization of Entry-Level Labor Markets: Regional Markets for New Physicians and Surgeons in the United Kingdom. American Economic Review, Vol. 81. No. 3. 415–440. o.

Roth, A. E.–Peranson, E. [1997]: The Effects of the Change in the NRMP Matching Algorithm. Journal of the American Medical Association, Vol. 278. No. 9. 729–732. o.

Roth, A. E.–Peranson, E. [1999]: The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design. American Economic Review, Vol. 89. No. 4. 748–780. o.

Teo, C.-P.–Sethuraman J.–Tan, W.-P. [2001]: Gale-Shapley Stable Marriage Problem Revisited:Strategic Issues and Applications. Management Science, Vol. 47. No. 9. 1252–1267. o.