Közgazdasági Szemle, LVI. évf., 2009. január (84–92. o.)

DOBOS IMRE

Dinamikus optimalizálás és a Leontief-modell

A tanulmány a variációszámítás gazdasági alkalmazásaiból ismertet hármat. Mindhárom alkalmazás a Leontief-modellen alapszik. Az optimális pályák vizsgálata után arra keressük a választ, hogy az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet rendszerrel kapott megoldások valóban optimális megoldásai-e a modelleknek. Arra a következtetésre jut a tanulmány, hogy csak pótlólagos közgazdasági feltételek bevezetésével határozhatók meg az optimális megoldások. Ugyanakkor a megfogalmazott feltételek segítségével az ismertetett modellek egy általánosabb keretbe illeszthetők. A tanulmány végső eredménye az, hogy mind a három modell optimális megoldása a Neumann-sugárnak felel meg.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C67, D5, D57, O4, O41.

A variációszámítás alkalmas arra, hogy időfüggő, azaz dinamikus megoldásokat állítson elő közgazdasági problémákra. A tanulmányban három dinamikus optimalizálási (variációszámítási) feladatot mutatunk be, amelyeket a Leontief-modellből származtatott *Bródy* [1980, 2002], valamint *Ábel* [1981]. A célunk mindezzel a variációszámítás alkalmazhatóságának vizsgálata lineáris vagy annak látszó modellekben.

Az első modell *Bródy* [1980] könyvéből származik, amelyben a szerző rendszerének mozgásegyenleteit vezeti le. Az itt optimalizálandó funkcionál az időben összegzett összes nyereséget tartalmazza, eltekintve attól, hogy azt mely ágazatok állították elő. Ez a modell az árak és a termelési szintek olyan meghatározását keresi, amelyek mellett az összes jövedelem a gazdaságban maximális.

A következő dinamikus problémát, amely variációszámítással kezelhető, *Ábel* [1981] cikkéből vettük. A tanulmány a gazdaságban jelenlévő általánosabb munkamegtakarítási elvet vizsgálja egy dinamikus modellben. Az általános modell egy alkalmazásaként a zárt dinamikus Leontief-modellt tekinti a szerző mintának. Ezt a lineáris modellt tárgyaljuk itt.

Az utolsó modellben újra *Bródy* [2002] egy munkáját állítjuk a vizsgálat középpontjába. Bródy e munkájában a ciklust tanulmányozta, és Goodwin ciklusmodelljeinek szellemében egy lineáris differenciálegyenletet tartalmazó modellben mutatja be a ciklus kialakulását és mozgásait. E differenciálegyenletből származtatható egy optimalizálási feladat, ahol a rendelkezésre álló és beruházott termékek különbségét optimalizáljuk.

E három különböző modell elemzése a variációszámításhoz (*Kósa* [1970], *Leitmann* [1981]), vagy optimális irányításhoz (*Pontrjagin és szerzőtársai* [1968]) vezet. A variációszámítással nyerhető megoldást az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet szolgáltatja,

* A szerző köszöni *Ábel Istvánnak* és *Simonovits Andrásnak,* hogy a tanulmány egy korábbi változatát elolvasták, és javaslataikkal hozzájárultak a dolgozat érthetőségének javításához.

Dobos Imre egyetemi docens, Budapesti Corvinus Egyetem, Vállalatgazdaságtan Intézet.

míg optimális irányítás esetén a Pontrjagin-féle maximumelv ad megoldást. *Pontrjagin és szerzőtársai* [1968] bebizonyította, hogy minden variációszámítási feladat átalakítható optimális irányítási feladattá. Sokan tartják az optimális irányítás elméletét a modern variációszámításnak. A variációszámításban azonban nehéz megállapítani, hogy az Euler–Lagrange-differenciálegyenlettel kapott megoldás valóban optimális-e. A szóban forgó három modellben ezt fogjuk vizsgálni, valamint azt elemezzük, hogy milyen pótlólagos közgazdasági feltételek szükségesek az optimális megoldások létezéséhez.

Az optimalitáshoz szükséges kiegészítő feltételek

A bemutatásra kerülő dinamikus Leontief-modellekben a következő jelöléseket alkalmazzuk:
$\mathbf{A}$ $n \times n$-es nemnegatív mátrix a folyó ráfordítások mátrixa,
$\mathbf{B}$ $n \times n$ -es nemnegatív mátrix a tőkebefektetések mátrixa,
$\mathbf{x}(t)$ n-dimenziós nemnegatív vektor az ágazatok termelési szintje,
$\mathbf{p}(t)$ n-dimenziós nemnegatív vektor az árvektor,
$\mathbf{m}(t)$ fel nem használt termékek mennyisége, n-dimenziós nem negatív vektor,
T a tervezési időhorizont hossza, nemnegatív.

A termelési szint és az árvektor idő szerinti deriváltját jelölje a fölöttük lévő pont. A mátrixok és vektorok transzponáltját vesszővel jelöljük. Feltételezzük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik nemnegatív Leontief-inverze, azaz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$ (*Bródy* [1969]).

A fenti jelölések segítségével további közgazdasági feltételezésekkel élünk. Először a gazdaságban megtermelt termékmennyiségre teszünk nemnegativitási feltételeket. Azt tételezzük fel, hogy a bruttó kibocsátás $[\mathbf{x}(t)]$ nagyobb, mint a bruttó kibocsátáshoz szükséges termelő felhasználás $[\mathbf{Ax}(t)]$ és a termelés bővítéséhez szükséges eszközök $[\mathbf{B\dot{x}}(t)]$ összege, vagyis

$$\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B\dot{x}}(t). \tag{1}$$

Ez az összefüggés azzal is indokolható, hogy csak a rendelkezésre álló termék mennyiségét lehet termelő felhasználásra és az eszközök bővítésére használni. Egy másik feltételezésünk az, hogy a fel nem használt termékek összege nem lehet nagyobb, mint egy előre megadott mennyiség, azaz

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{Ax}(t) - \mathbf{B\dot{x}}(t) \leq \mathbf{m}(t). \tag{2}$$

Ezzel a feltétellel a gazdaságban esetlegesen fellépő pazarlás nagyságának állítunk korlátot.

Az árvektorokra is tehető feltétel, aminek alapján az egységnyi ráfordítás $[\mathbf{p}(t)'\mathbf{A}]$ és az árváltozásából eredő nyereség $[\mathbf{\dot{p}}(t)'\mathbf{B}]$ összege nem emelkedhet a piacon kialakult árak, $\mathbf{p}(t)$ fölé:

$$\mathbf{p}(t)' \geq \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{\dot{p}}(t)' \cdot \mathbf{B}. \tag{3}$$

Az (1)–(3) feltételezések segítségével oldjuk meg a dinamikus optimalizálási feladatainkat, és előállítjuk az optimális trajektóriákat.

A nyereségmaximalizáló modell

Bródy András Ciklus és szabályozás című könyvében (*Bródy* [1980]) tett kísérletet a Goodwin-féle ciklusmodell Leontief-féle modellekre történő alkalmazására. A ciklust a gazdaság szereplőinek nyereségmaximalizáló viselkedéséből vezette le. E modell nyereségfunkcionálja három tényezőből áll:

– a piacon realizált nyereség $\mathbf{p}(t)'(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t)$ alakban felírható része,

– a készletek és befektetett eszközök árváltozásából eredő nyereség, amely $\dot{\mathbf{p}}(t)'\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$ alakú és a

– a termelés bővítésére fordított eszközök $\dot{\mathbf{p}}(t)'\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t)$ költsége.

E három tényezőből áll elő az időben kummulált nyereség:

$$\mathbf{I}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \int_0^T [\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)]dt, \tag{4}$$

amit maximalizálni szeretnénk, ahol $\mathbf{I}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ az optimalizálandó funkcionál. Ezt a funkcionált először a variációszámításból ismert Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszerrel oldjuk meg.

A cél tehát a gazdaságban képződő összes nyereség maximalizálása. Alakítsuk át a (4) funcionálban szereplő $L[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]$ integrandust a következő alakra:

$$L[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{p}(t) \quad \mathbf{x}(t)]' \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{I} - \mathbf{A}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{p}(t) \quad \mathbf{x}(t)]' \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Ez az alak azért lesz hasznos, mert ebből az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet rendszert könnyebben származtathatjuk. Alkalmazzuk most az optimalitás szükséges feltételét:

$$\frac{\partial L}{\partial[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)]}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{I} - \mathbf{A}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix},$$

valamint

$$\frac{\partial L}{\partial[\dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix},$$

amiből az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet rendszert felhasználva

$$\frac{\partial L}{\partial[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)]}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial[\dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = 0,$$

a következő lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapjuk az optimum szükséges feltételeként:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{I} - \mathbf{A}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ami egyszerű átrendezéssel

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{2} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}')\cdot\mathbf{p}(t)+2\cdot\mathbf{B}'\cdot\dot{\mathbf{p}}(t)=\mathbf{0}.$$

Az ilyen típusú differenciálegyenlet-rendszerek megoldását mutatta be *Dobos* [2007]. Szorozzuk most be az első egyenletet a $\mathbf{p}'(t)$ árvektorral, míg a másodikat a tevékenységi szintek $\mathbf{x}'(t)$ vektorával. Ekkor

$$\mathbf{p}(t)'\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{x}(t)-\mathbf{2}\cdot\mathbf{p}(t)'\cdot\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{0},$$

és

$$\mathbf{x}(t)'\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A}')\cdot\mathbf{p}(t)+\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}(t)'\cdot\mathbf{B}'\cdot\dot{\mathbf{p}}(t)=\mathbf{0}.$$

Összegezve a két egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}(t)'\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}(t)'\cdot\mathbf{B}'\cdot\dot{\mathbf{p}}(t)-\mathbf{p}(t)'\cdot\mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{0}.$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés azonos az (4) funkcionál integrandusával. A kapott feltétel tehát azt jelenti, hogy ennek az integrandusnak az extremális megoldásban nullával kell azonosnak lennie, vagyis

$$\mathbf{I}[\mathbf{p}^s(t),\ \mathbf{x}^s(t)]=\mathbf{0},$$

ahol $[\mathbf{p}^s(t),\ \mathbf{x}^s(t)]$ jelöli a stacionárius megoldást.

Ezt az eredményt kapta *Bródy* [1980] is, jóllehet formálisan nem a variációszámítás Euler–Lagrange-féle szükséges feltételét alkalmazta. Ezen a formán végezte aztán a ciklus alakját vizsgáló analízisét is. De ez valóban az optimális megoldása a (4) variációszámítási feladatnak?

A következőkben egy numerikus számpéldán azt fogjuk megmutatni, hogy ez nem lehet optimális, csak stacionárius megoldás, tehát a problémát tovább kell vizsgálni. A numerikus példa adatai *Bródy* [2004] tanulmányából származnak. Legyenek a rendszer mátrixai

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10\end{bmatrix}.$$

Ekkor a következő két differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani az optimumot adó trajektóriák előállításához:

$$2\cdot\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_2(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}4 & -0{,}2 & -0{,}2\\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}2\\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\\ \mathbf{x}_3(t)\end{bmatrix},\qquad t\in[0,\ 5],$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(0)\\ \mathbf{x}_2(0)\\ \mathbf{x}_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$2\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{p}}_2(t)\\ \dot{\mathbf{p}}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}4 & -0{,}1 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}3\\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1(t)\\ \mathbf{p}_2(t)\\ \mathbf{p}_3(t)\end{bmatrix},\qquad t\in[0,\ 5],$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(0) \\ \mathbf{p}_2(0) \\ \mathbf{p}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ezek megoldása

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\frac{1}{60}\cdot t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}_2(t) \\ \mathbf{p}_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\frac{1}{60}\cdot t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0,\ 5],$$

vagyis ebben az esetben a megoldások a Neumann-sugáron fekszenek, vagyis nemnegatívak. A nyereségfuncionál értéke a stacionárius megoldásra: $\mathbf{I}(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ugyanakkor, ha veszünk egy olyan lehetséges megoldást, amely konstans a tervezési időhorizont mentén, nevezetesen a kezdeti értékkel egyezik meg:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(t) \\ \mathbf{p}_2(t) \\ \mathbf{p}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0,\ 5],$$

akkor tudjuk, hogy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) = 0.$ Ebből következik, hogy

$$\mathbf{I}(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \int_0^5 [\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t)]dt = \int_0^5 1{,}3\,dt = 6{,}5.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet rendszert kielégítő termelési és árvektorok nem adnak maximális összes nyereséget a gazdaságra nézve, mert létezik ennél legalább egy jobb trajektória. Ez azt is jelenti, hogy a maximális nyereség eléréséhez további közgazdasági feltételeket is teljesítenie kell a gazdaságnak. Azt mutatjuk meg, hogy a (2) és (3) feltételekkel az optimális megoldás előállítható.

Alakítsuk át a (4) funkcionált a következő módon:

$$\mathbf{I}(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \int_0^T \{\mathbf{p}(t)' \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t)\}dt.$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségeket szorozzuk meg most a nemnegatív árvektorral és a nemnegatív termelési szintek vektorával. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{m}(t) \geq \mathbf{p}(t)' \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)], \tag{5}$$

valamint

$$\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) \geq \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t). \tag{6}$$

Az összes nyereségre tehát a következő felsőkorlát adódik:

$$\int_0^T \{\mathbf{p}(t)' \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t)\}dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \{\mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{m}(t) + \mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t)\}dt.$$

Ez azt jelenti, hogy a maximumot a nyereségfunkcionál akkor éri el, ha az (5) és (6) egyenlőtlenségek szigorú egyenlőségre teljesülnek, ami egyben maga után vonja a (2) és (3) egyenlőtlenségek szigorú egyenlőség voltát is. Az optimális trajektóriákat tehát az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{m}(t),$$

és a

$$\mathbf{p}(t)' = \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{A} + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B}$$

differenciálegyenlet-rendszerek megoldásával állíthatjuk elő. A megoldást explicit formában *Dobos* [2007] mutatta be.

A munkamegtakarító elv

Ábel [1981] tanulmányában a *Bródy* [1969] által modellezett marxi munkaérték-elmélet alapján mutat be egy variációszámítási modellt. A modell alakja a következő:

$$L(\mathbf{x}) = \int_0^T [\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)]dt \to \text{extremal}.$$

Ez a modellforma annyiban különbözik a *Bródy* [1980] által javasolttól, hogy itt az árváltozásból eredő nyereség nem szerepel az integrandusban, és a profitmaximalizálás helyett a munkamegtakarítást kell maximalizálni. A modell felállításakor feltételezzük, hogy az árak $\mathbf{p}(t)$ vektora ismert, amint azt *Ábel* [1981] is feltételezte.

Az Euler–Lagrange-féle differeciálegyenlet-rendszert alkalmazhatjuk a feladatra, amint azt *Ábel* [1981] is tette. Az extrémum szükséges feltétele tehát

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{p}(t) + \mathbf{B}' \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) = 0, \qquad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Ezzel az összefüggéssel tehát csak az árakra tehetünk feltételezést, és nem a termelési szintre. Mivel az árak exogén változók, ezért azok előre ismertek. Az árakra viszont ekkor a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{e}^{-\lambda \cdot t} \cdot \overline{\mathbf{p}}$ összefüggés tehető, ami *Bródy* [1969] könyvében is megtalálható. A λ érték és $\overline{\mathbf{p}}$ vektor a $(\mathbf{I} - \mathbf{A}') \cdot \overline{\mathbf{p}} + \lambda \cdot \mathbf{B}' \cdot \overline{\mathbf{p}} = 0$ sajátérték-feladat nemnegatív megoldásai. De térjünk vissza a modellhez és tegyük fel a kérdést, hogyan alakulna ugyanakkor ez a szükséges feltétel, ha az árvektor nem elégítené ki a (7) differenciálegyenlet-rendszert! Tételezzük most fel, hogy a $\mathbf{p}(t)$ árvektor nem elégíti ki a fenti differenciálegyenlet-rendszert, de időben differenciálható függvény. Ekkor az integrált a következők szerint alakíthatjuk át:

$$\int_0^T [\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)]dt =$$

$$= \int_0^T [\{\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B}\} \cdot \mathbf{x}(t)]\, dt - [\mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t)]_0^T.$$

A minimalizálást így csak akkor tudjuk elvégezni, ha minden időpontban létezik a következő feladatnak minimuma:

$$\min_{\mathbf{x}(t) \geq 0} [\{\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B}\} \cdot \mathbf{x}(t)].$$

A következő alakú lehet a minimumfeladat egyik megoldása:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{o}}(t) = \begin{cases} 0 & \mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} \geq 0 \\ +\infty & \mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B} < 0, \end{cases}$$

ami azt jelenti, hogy amennyiben a termelési szintek vektora felülről nem korlátos, akkor csak egy speciális trajektória létezik.

Válasszunk most egy másik utat az optimális megoldás előállításához! Mivel ebben az esetben a célfunkcionált nem maximalizálni kell, hanem minimalizálni, ezért alkalmazhatjuk a minimalizáláshoz az (1) egyenlőtlenséget. A minimalizálás azért lesz kitűzött cél ebben a modellben, mert a munkamegtakarítást maximalizáljuk, azaz a termékveszteséget minimalizáljuk. Az alsó korlát az integrandusra a következő lesz:

$$\int_0^T [\mathbf{p}(t)' \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] dt \geq 0.$$

Mivel az ismert árvektor nemnegatív, és az (1) egyenlőtlenség is nemnegatív, így az optimumot, azaz a nullát az $L(x)$ funkcionál akkor veszi fel, ha az (1) egyenlőtlenség szigorú egyenlőséget vesz fel, vagyis

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t).$$

Ez az alak pedig nem más, mint a zárt dinamikus Leontief-modell. A megoldás könnyen előállítható *Dobos* [2007] cikkében adott módszerrel. Az optimális trajektória a Neumann-sugáron fekszik.

A mozgásegyenletek és a variációszámítás

Most áttérünk a bővített újratermelés ciklikus pályája modelljének vizsgálatára (*Bródy* [1997]). A modell mátrixai és változói, amelyek a gazdaság ciklusait generálják:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}' & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{I} - \mathbf{A}' & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}.$$

A gazdaság mozgásegyenlete ekkor

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}(t). \tag{8}$$

A *Bródy* [2002], [2007] által felvázolt variációszámítási modell alakja az alábbi módon alakul:

$$\int_0^T [\mathbf{z}(t)' \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)' \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{z}}(t)]\, dt \to \max.$$

Az integrandus ebben az esetben a rendelkezésre álló és beruházott többlet egyenlege, amit maximalizálni kell. Kisebb átalakítások után az integrandus a következő formát veszi fel:

$$[\mathbf{p}(t)' \quad \mathbf{x}(t)'] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{I} - \mathbf{A}' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} - [\mathbf{p}(t)' \quad \mathbf{x}(t)'] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{p}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)' \cdot \mathbf{x}(t) \right].$$

Mindezek alapján a célfunkcionál alakja:

$$\int_0^T [\mathbf{z}(t)' \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)' \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{z}}(t)]\, dt =$$

$$= \int_0^T \left\{ \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{p}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)' \cdot \mathbf{x}(t) \right] \right\} dt =$$

$$= \left[\mathbf{p}(T)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(T) - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{p}(T)' \cdot \mathbf{p}(T) - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}(T)' \cdot \mathbf{x}(T) \right] -$$

$$- \left[\mathbf{p}(0)' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(0) - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{p}(0)' \cdot \mathbf{p}(0) - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}(0)' \cdot \mathbf{x}(0) \right].$$

Ez azt is jelenti, hogy a feladat ebben az esetben nem más, mint a tervezési időhorizont végén rendelkezésre álló $\mathbf{p}(T)'\mathbf{B}\mathbf{x}(T)$ készletek értékösszegének, valamint a termelési szintek és az árvektor négyzetösszege különbségének a maximalizálása, az (1) és (3) mellékfeltételek mellett. A probléma tehát a következő formában írható fel:

$$[\mathbf{p}(T)' \quad \mathbf{x}(T)'] \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}(T) \\ \mathbf{x}(T) \end{bmatrix} \to \max,$$

valamint

$$\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t),$$

$$\mathbf{p}(t)' \geq \mathbf{p}(t)' \cdot \mathbf{A} + \dot{\mathbf{p}}(t)' \cdot \mathbf{B}.$$

A feladat ebben a formájában tehát egy kvadratikus célfüggvényű dinamikus közgazdasági probléma, amelynek az optimális megoldását keressük.

A feladat lényegét tekintve a hagyományos „turnpike” elmélethez vezet, amelyet *Dorfman és szerzőtársai* [1958] írt le először. A probléma matematikai tulajdonságainak tárgyalását diszkrét modellben lásd például *Aszmanov* [1984]. A matematikai részletek mellőzésével felírható a probléma optimális megoldása, amely nem más, mint az árakra és termelési szintekre a Neumann-sugár, azaz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\lambda \cdot t} \cdot \overline{\mathbf{x}},$$

és

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{e}^{\lambda \cdot t} \cdot \overline{\mathbf{p}},$$

ahol $\overline{\mathbf{x}}$ a zárt dinamikus Leontief-modell jobb oldali, míg $\overline{\mathbf{p}}$ a bal oldali sajátvektora, és λ a legnagyobb növekedési ráta.

Vizsgáljuk most meg a (8) lineáris differenciálegyenlet-rendszer lehetséges megoldásait, amint azt tette *Bródy* [2004]! Ehhez a következő sajátérték-feladatot kell megoldanunk:

$$\lambda \mathbf{S} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}.$$

Ehhez hasonló sajátérték-feladatot vizsgált *Dobos* [2007] arra az esetre, amikor az **S** mátrix szinguláris. Ebben a feladatban is elképzelhető, hogy a mátrix szinguláris, mégpedig akkor, ha az $\mathbf{I} - \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}$ mátrix szinguláris. Most azt fogjuk belátni, hogy ha egy λ_1 sajátértéke a problémának, akkor a $-\lambda_1$ is sajátértéke. Ez azt is jelenti, hogy a sajátértékek vagy páronként valósak, vagy páronként tisztán képzetesek.

Tételezzük fel, hogy λ_1 sajátérték és a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{z}_1$. Ekkor

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}_1.$$

Vegyük most ennek az egyenletnek a transzponáltját:

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{S}' = -\mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{K}'.$$

Mivel az **S** mátrix szimmetrikus, ezért $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$, valamint a **K** mátrix ferdén szimmetrikusságából következik, hogy $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$. Használjuk most ezt a két összefüggést az előbbi, transzponált feladatra:

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{K},$$

ami átalakítás után

$$-\lambda_1 \cdot \mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{S} = \mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{K}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy ha λ_1 sajátértéke a problémának, akkor $-\lambda_1$ is az. Ráadásul ha $\mathbf{z}_1$ jobb oldali sajátvektor, akkor $\mathbf{z}_1'$ bal oldali sajátvektora a feladatnak.

*

A tanulmányban három modellt tekintettünk át, amely a Leontief-modellre épülő gazdasági elemzések és a dinamikus optimalizálás (variációszámítás) kapcsolatát vizsgálták. Azt kaptuk, hogy az ilyen modellekben pótlólagos feltételek szükségesek az optimális trajektóriák megállapításához. A pótlólagos feltételezések egyrészt a termelési szintekre adnak korlátozásokat, másrészt az árakra. A Leontief-modellen alapuló dinamikus optimalizálási feladatok optimális megoldása, amint azt a három modellben láttuk, a Neumann-sugárhoz vezet.

Hivatkozások

ÁBEL ISTVÁN [1981]: The labor saving principle with an application to the Leontief-type economies. International Economic Review, 22. 377–383. o.

ASZMANOV, S. A. [1984]: Vegyenyije v matyematyicseszkuju ekonomiku. Nauka, Moszkva (oroszul).

BRÓDY ANDRÁS [1969]: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

BRÓDY ANDRÁS [1980]: Ciklus és szabályozás: Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

BRÓDY ANDRÁS [1997]: A piac és az egyensúly. A neumanni és kvázi-hamiltoni rendszer. Közgazdasági Szemle, 9. sz. 738–756. o.

BRÓDY ANDRÁS [2002]: Bevezetés a mozgáselméletbe. Közgazdasági Szemle, 2. sz. 93–104. o.

BRÓDY ANDRÁS [2004]: Near equilibrium. A research report on cyclic growth. Aula, Budapest.

BRÓDY ANDRÁS [2007]: A ciklus oka és hatása. Közgazdasági Szemle, 10. sz. 903–914. o.

DOBOS IMRE [2007]: Egy megjegyzés Bródy András: Leontief zárt dinamikus modellje című dolgozathoz. Közgazdasági Szemle, 11. sz. 1004–1011. o.

DORFMAN, R.–SAMUELSON, P. A.–SOLOW, R. M. [1958]: Linear Programming and Economic Analysis. McGraw-Hill, New York.

KÓSA ANDRÁS [1970]: Variációszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest.

LEITMANN, G. [1981]: Calculus of variations. Plenum Press, New York, London.

PONTRJAGIN, L. SZ.–BOLTTYANSZKIJ, V. G.–GAMKRELIDZE, R. V.–MISCSENKO, E. F. [1968]: Optimális folyamatok elmélete. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.